MỞ ĐẦU

Trong những năm gần đây, chúng ta biết rằng chương trình thi học sinh giỏi, giải toán trên MTCT các cấp đều có những bài toán hình học đặc biệt là các dạng Toán giải tam giác nâng cao trong đề thi cấp tỉnh quốc gia khi học sinh gặp phải thì rất là bở ngỡ và lúng túng. Vì các bài tập này thường yêu cầu lập công thức tổng quát theo các đại lượng đã cho rồi mới sử dụng MTCT ấn máy cho ra kết quả, nói chung là phải giải toán trước để tìm ra công thức. Trong các bài tập này thường yêu cầu tính toán các đại lượng trong tam giác theo các đại lượng khác. Để giải được dạng Toán này thì ta phải sử dụng các công thức tính diện tích, các công thức tính độ dài đường phân giác, đường cao, đường trung tuyến,...và những định lí quan trọng như: Pitago, định lí hàm số sin, hàm số cos, ... thì định lí hàm số sin là một trong những định lí quan trọng nhất để giải dạng Toán này. Chính vì thế, tôi xin đưa ra một số ứng dụng từ định lí hàm số sin mà chúng ta chưa thấy hết tầm quan trọng của nó. Nhờ định lí hàm số sin và các định lí khác mà tôi đã tạo ra các định lí khác rất hay ứng dụng nhiều trong giải dạng Toán giải tam giác nâng cao này một cách nhanh gọn hơn.

Theo tinh thần đổi mới phương pháp thi của Bộ GD&ĐT năm 2015 đã tiến hành thi giải Toán MTCT trực tuyến trên mạng. Đề thi theo hình thức trắc nghiệm. Do đó yêu cầu học sinh giải nhanh và đúng đáp số nên học sinh phải nắm các công thức mới tính nhanh được. Nhằm để đáp ứng nhu cầu của đông đảo học sinh tham gia đội tuyển học sinh giỏi giải Toán trên máy tính cầm tay cấp huyện, cấp tỉnh và quốc gia bậc THCS và THPT hiện nay.

Bản thân tôi là người trực tiếp tham gia dạy bồi dưỡng đội tuyển HSG giải toán trên MTCT từ cấp trường đến cấp quốc gia trong gần 18 năm nay, tôi đã tìm ra được nhiều điều thú vị từ Định lí hàm số sin như:

+ Mối quan hệ giữa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp, bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

+ Cho ta biết tỉ số giữa $TS_O^I, TS_O^\Delta, TS_I^\Delta$, TS_{ABC}^A, $T_{f_a}^{h_a}$, $T_{m_a}^{h_a}$, $T_{m_a}^{f_a}$, TC_I^Δ, TC_O^Δ, TC_O^I chỉ phụ thuộc vào số đo các góc của tam giác chứ không phụ thuộc vào độ dài cạnh, bán kính đường tròn ngoại tiếp, bán kính đường tròn nội tiếp, chu vi của tam giác.

Vì thế, tôi xin đưa ra 21 định lí mà tôi đã tự tìm ra được nhằm giúp cho HS tham gia HSG, giải Toán trên MTCT có kết quả cao trong các kỳ thi và GV cũng có thêm tài liệu tham khảo để bồi dưỡng đội tuyển HSG.

NỘI DUNG

CHÚNG TA BẮT ĐẦU TỪ BÀI TOÁN MỞ ĐẦU

Cho tam giác nhọn ABC, biết BC = a, AC = b, AB = c. Gọi S, p, r, R lần lượt là diện tích, nửa chu vi, bán kính đường tròn nội tiếp, bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC, phân giác AD, trung tuyến AM. Chứng minh rằng:

a) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

b) S = $\frac{1}{2}bc\sin A = pr = \sqrt{p(p-a)p-b)(p-c)} = \frac{abc}{4R}$

c) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$

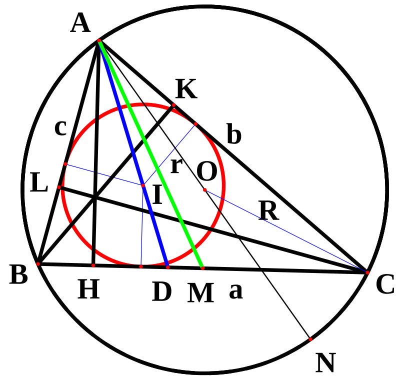
d) AD = $\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$

e) $2AM^2 = AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2}$

<u>Giải:</u>

Kẻ các đường cao AH, BK, CL của ΔABC (H$\in$BC, K$\in$AC, L$\in$AB)

I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC, O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Kéo dài OA cắt đường tròn (O) tại N



a)Ta có $\frac{a}{\sin A} = \frac{a}{\frac{CL}{b}} = \frac{ab}{CL}$; $\frac{b}{\sin B} = \frac{b}{\frac{CL}{a}} = \frac{ab}{CL} \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ (1)

$\frac{a}{\sin A}=\frac{a}{\frac{BK}{c}}=\frac{ac}{BK};\frac{c}{\sin C}=\frac{c}{\frac{BK}{a}}=\frac{ac}{BK}\Rightarrow\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ (3)

Ta có : ABNC là tứ giác nội tiếp đường tròn (O;R)

$\Rightarrow \widehat{ANB}=\widehat{ACB}=\widehat{C}$

Ba điểm A, O, N thẳng hàng; A và N thuộc đường tròn (O;R)

$\Rightarrow$AN là đường kính của đường tròn (O;R)

$\Rightarrow \widehat{ANB}=90^0$ và AN = 2R

Ta có $\frac{c}{\sin C}=\frac{c}{\sin ABN}=\frac{c}{\frac{c}{AN}}=AN=2R$ (4) (ΔABN vuông tại B)

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$ (đpcm)

b)Ta có: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}c.CL=\frac{1}{2}c.b\sin A=\frac{1}{2}bc\sin A$ (*)

$$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta IAB}+S_{\Delta IBC}+S_{\Delta IAC}=\frac{1}{2}AB.r+\frac{1}{2}BC.r=\frac{1}{2}AC.r$$

$$=\frac{1}{2}.r(AB+BC+CA)=r.\frac{a+b+c}{2}=p.r\ (**)$$

Áp dụng định lí Pitago trong tam giác vuông, ta có:

$AB^2 - BH^2 = AC^2 - HC^2$

$\Leftrightarrow AB^2 - (BC - CH)^2 = AC^2 - HC^2$

$\Leftrightarrow AB^2 - (BC^2 - 2BC.CH + CH^2) = AC^2 - HC^2$

$\Leftrightarrow CH = \frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2BC}=\frac{b^2+a^2-c^2}{2a}$

$\Rightarrow CH^2 = \left(\frac{b^2+a^2-c^2}{2a}\right)^2$

$\Rightarrow AH^2 = b^2 - \left(\dfrac{b^2+a^2-c^2}{2a}\right)^2$

$$S_{ABC}^2 = \frac{AH^2.BC^2}{4} = \left[b^2 - \left(\frac{b^2+a^2-c^2}{2a}\right)^2\right].\frac{1}{4}.a^2$$

$$= \frac{\left[4a^2b^2 - (b^2+a^2-c^2)^2\right].a^2}{16a^2}$$

$$= \frac{(2ab+b^2+a^2-c^2)(2ab-b^2-a^2+c^2)}{16}$$

$$= \frac{(a+b+c)(a+b-c)(c-a+b)(c+a-b)}{16}$$

$$= \frac{2p(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)}{16}$$

$$= p(p-a)(p-b)(p-c)$$

$\Rightarrow S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (***)

Từ câu a) $\dfrac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow a = 2R\sin A = 2R.\dfrac{CL}{b}$

$\Rightarrow ab = 2R.CL \Rightarrow abc = 2R.CL.c = 2R.2S_{ABC}$

$\Leftrightarrow abc = 4R.S_{ABC} \Leftrightarrow S_{ABC} = \dfrac{abc}{4R}$ (****)

Từ (*),(**), (***),(****), ta có

S = $\dfrac{1}{2}bc\sin A = pr = \sqrt{p(p-a)p-b)(p-c)} = \dfrac{abc}{4R}$ (đpcm)

c) Ta có $b^2 + c^2 - 2bc.\cos A = AK^2 + KC^2 + 2AK.KC + AB^2 - 2AB.AC.\dfrac{AK}{AB}$

$= AK^2 + KC^2 + 2AK.KC + (AK^2 + BK^2) - 2AC.AK$

$= 2AK^2 + KC^2 + 2AK.KC + BK^2 - 2(AK + KC)AK$

$= 2AK^2 + KC^2 + 2AK.KC + BK^2 - 2(AK + KC)AK$

$= 2AK^2 + KC^2 + 2AK.KC + BK^2 - 2AK^2 - 2AK.KC$

$= KC^2 + BK^2 = BC^2 = a^2$

Vậy: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$ (đpcm)

d) Ta có $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ADC}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}AB.AC.\sin A = \frac{1}{2}AB.AD.\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}AD.AC.\sin\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow AB.AC.\sin A = AD.\sin\frac{A}{2}\left(AB + AC\right)$$

$$\Leftrightarrow AB.AC.2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2} = AD.\sin\frac{A}{2}\left(AB + AC\right)$$

$$\Leftrightarrow AB.AC.2\cos\frac{A}{2} = AD\left(AB + AC\right)$$

$$\Leftrightarrow AD = \frac{2AB.AC\cos\frac{A}{2}}{AB + AC}$$

$$\Leftrightarrow AD = \frac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b + c} \text{ (đpcm)}$$

e) Ta có $AB^2 = AH^2 + BH^2$

$AC^2 = AH^2 + CH^2$

$\Rightarrow AB^2 + AC^2 = 2AH^2 + BH^2 + CH^2$

$$\Rightarrow AB^2 + AC^2 = 2AH^2 + \left(\frac{BC}{2} - HM\right)^2 + \left(\frac{BC}{2} + HM\right)^2$$

$$= 2AH^2 + \frac{BC^2}{4} + HM^2 - BC.HM + \frac{BC^2}{4} + HM^2 + BC.HM$$

$$= 2AH^2 + \frac{BC^2}{2} + 2HM^2$$

$$\Rightarrow AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2} = 2AH^2 + 2HM^2 = 2(AH^2 + 2HM^2) = 2AM^2$$

Vậy: $2AM^2 = AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2}$ (đpcm)

Nếu chúng ta viết định lí hàm sin dưới dạng:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{2P}{\sin A+\sin B+\sin C} = 2R$$

$$\Rightarrow\ a=\frac{2P.\sin A}{\sin A+\sin B+\sin C}\quad (*)$$

$$b=\frac{2P.\sin B}{\sin A+\sin B+\sin C}\quad (**)$$

$$c=\frac{2P.\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}\quad (***)$$

Thì định lí hàm sin này cho ta nhiều điều thú vị về:

- Mối quan hệ giữa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp, bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

- Cho ta biết tỉ số giữa $TS_O^I, TS_O^\Delta, TS_I^\Delta$, TS_{ABC}^A, $T_{f_a}^{h_a}$, $T_{m_a}^{h_a}$, $T_{m_a}^{f_a}$, TC_I^Δ, TC_O^Δ, TC_O^I chỉ phụ thuộc vào số đo các góc của tam giác chứ không phụ thuộc vào độ dài cạnh, bán kính đường tròn ngoại tiếp, bán kính đường tròn nội tiếp, chu vi của tam giác.

Đồng thời định lí này mở ra cách chứng minh mới cho tam giác cân, tam giác đều và nhiều hệ thức rất đẹp.

TỪ BÀI TOÁN TRÊN CHO TA 21 ĐỊNH LÝ SAU:

***ĐỊNH LÝ 1:**

Trong ΔABC có nửa chu vi bằng P, ta đều có:

1) $S_{\Delta ABC}=2P^2\dfrac{\sin A.\sin B.\sin C}{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}$

2) $h_a = 2P.\dfrac{\sin B.\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}$;

$h_b = 2P.\dfrac{\sin A.\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}$,

$h_c = 2P.\dfrac{\sin A.\sin B}{\sin A+\sin B+\sin C}$,

(h_a , h_b , h_c : là các chiều cao tương ứng kẻ từ A, B, C)

3) $m_a = \dfrac{P}{\sin A+\sin B+\sin C}.\sqrt{2\sin^2 B+2\sin^2 C-\sin^2 A}$

$m_b = \dfrac{P}{\sin A+\sin B+\sin C}.\sqrt{2\sin^2 A+2\sin^2 C-\sin^2 B}$;

$m_c = \dfrac{P}{\sin A+\sin B+\sin C}.\sqrt{2\sin^2 A+2\sin^2 B-\sin^2 C}$

(m_a; m_b; m_c: Độ dài các đường trung tuyến kẻ từ A, B, C)

4) $f_a = \dfrac{2P}{\sin\frac{A}{2}(\sin B+\sin C)}.\dfrac{\sin A.\sin B.\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}$;

$f_b = \dfrac{2P}{\sin\frac{B}{2}(\sin A+\sin C)}.\dfrac{\sin A.\sin B.\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}$;

$f_c = \dfrac{2P}{\sin\frac{C}{2}(\sin A+\sin B)}.\dfrac{\sin A.\sin B.\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}$;

(f_a; f_b; f_c : Độ dài các đường phân giác trong kẻ từ A, B, C)

5) Bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC là

$R = \dfrac{P}{\sin A+\sin B+\sin C}$

6) Bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC là

$r = 2P.\dfrac{\sin A.\sin B.\sin C}{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}$

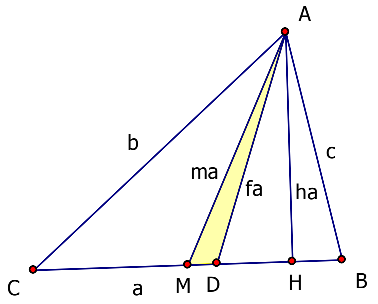
7) Gọi S_A, S_B, S_C lần lượt là diện tích tam giác tạo bởi đường trung tuyến, đường phân giác của đỉnh A, B, C với cạnh BC, AC, AB. Ta có

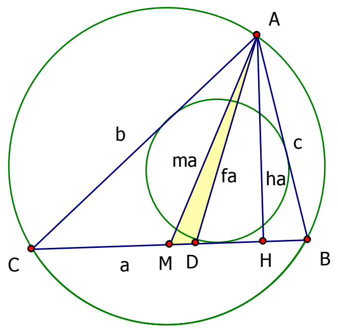
$$S_A = \left|P^2.\frac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}.\frac{\sin A.\sin B.\sin C}{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}\right|$$

$$S_B = \left|P^2.\frac{\sin A-\sin C}{\sin A+\sin C}.\frac{\sin A.\sin B.\sin C}{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}\right|$$

$$S_C = \left| P^2.\frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B}.\frac{\sin A.\sin B.\sin C}{(\sin A + \sin B + \sin C)^2} \right|$$

Giải:





1) Theo định lí hàm sin, ta có

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{2P}{\sin A + \sin B + \sin C}$$

$$\Rightarrow a = \frac{2P.\sin A}{\sin A + \sin B + \sin C} \quad (*)$$

$$b = \frac{2P.\sin B}{\sin A + \sin B + \sin C} \quad (**)$$

$$c = \frac{2P.\sin C}{\sin A + \sin B + \sin C} \quad (***)$$

Mà $S = \frac{abc}{4R} = \frac{8P^3 \sin A.\sin B.\sin C}{(\sin A + \sin B + \sin C)^3} : 4R$

$$= \frac{8P^3.\sin A.\sin B.\sin C}{4R(\sin A + \sin B + \sin C)^3} \ (1)$$

Hơn nữa theo định lí hàm sin, ta có $\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{a}{2\sin A}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $S = \dfrac{2P^3 \sin A.\sin B.\sin C}{\frac{a}{2.\sin A}(\sin A + \sin B + \sin C)^3}$

$$= \frac{4P^3.\sin^2 A.\sin B.\sin C}{a(\sin A + \sin B + \sin C)^3} \text{ (3)}$$

Từ (*) và (3) suy ra $S = 2P^2.\frac{\sin A.\sin B.\sin C}{(\sin A + \sin B + \sin C)^2}$ (đpcm)

2) a) Ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AH.BC$

Suy ra $AH = \frac{2.S_{\Delta ABC}}{BC} = \frac{2.2P^2 \sin A.\sin B.\sin C}{a(\sin A + \sin B + \sin C)^2}$ (4)

Từ (*) và (4) suy ra AH = $\frac{2P.\sin B.\sin C}{\sin A + \sin B + \sin C}$ (đpcm)

b) Theo công thức tính độ dài đường trung tuyến trong tam giác, ta có :

$b^2 + c^2 = 2\,m_a^2 + \frac{a^2}{2}$ nên suy ra $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ (5)

Từ (*),(**),(***) và (5) suy ra

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8P^2 \sin^2 B + 8P^2 \sin^2 C - 4P^2 \sin^2 A}{(\sin A + \sin B + \sin C)^2}}$$

$$= \frac{P}{\sin A + \sin B + \sin C}\sqrt{2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A}$$

Hay AM = $\frac{P}{\sin A + \sin B + \sin C}\sqrt{2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A}$ (đpcm)

c) Ta có $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ADC} + S_{\Delta ADB} = \frac{1}{2}b.AD.\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}c.AD.\sin\frac{A}{2}$

$$= \frac{AD}{2}(b+c).\sin\frac{A}{2}$$

suy ra AD = $\frac{2.S_{\Delta ABC}}{(b+c).\sin\frac{A}{2}}$ (6)

Từ (**), (***), (5) và câu 1: suy ra

AD = $\frac{4P^2.\sin A.\sin B.\sin C}{(\sin A + \sin B + \sin C)^2} : \left[\left(\frac{2P.\sin B}{\sin A + \sin B + \sin C} + \frac{2P.\sin C}{\sin A + \sin B + \sin C}\right).\sin\frac{A}{2}\right]$

$$= \frac{4P^2.\sin A.\sin B.\sin C}{(\sin A+\sin B+\sin C)^2} : \left[\left(\frac{2P(\sin B+\sin C)}{\sin A+\sin B+\sin C}\right).\sin\frac{A}{2}\right]$$

Hay AD = $\frac{2P}{\sin\frac{A}{2}(\sin B+\sin C)}.\frac{\sin A.\sin B.\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}$ (đpcm)

3) a) Ta có $S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S}$

Từ (*), (**), (***), (5) và câu 1:

suy ra R = $\frac{8P^3.\sin A.\sin B.\sin C}{(\sin A+\sin B+\sin C)^3} : \left[4.\frac{2P^2.\sin A.\sin B.\sin C}{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}\right]$

$= \frac{P}{\sin A+\sin B+\sin C}$ (đpcm)

Vậy : R = $\frac{P}{\sin A+\sin B+\sin C}$

Cách khác: Từ định lí hàm sin ta suy ra R = $\frac{P}{\sin A+\sin B+\sin C}$

b) Ta có S = p.r suy ra $r = \frac{S}{P}$ (7)

Từ câu 1 và (7) suy ra r = $\frac{2P^2.\sin A.\sin B.\sin C}{P(\sin A+\sin B+\sin C)^2}$

$= 2P.\frac{\sin A.\sin B.\sin C}{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}$ (đpcm)

Vậy: r = $2P.\frac{\sin A.\sin B.\sin C}{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}$

4) Ta có $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$ (tính chất đường phân giác)

Suy ra $\frac{AB}{AC+AB} = \frac{DB}{DC+DB} = \frac{DB}{BC}$

Suy ra $DB = \frac{AB.BC}{AC+AB} = \frac{a.c}{b+c} \quad \Rightarrow \; DC = a - \frac{a.c}{b+c} = \frac{a.b}{b+c}$

Do đó $MD = \frac{BC}{2} - DB = \frac{a}{2} - \frac{ac}{b+c} = \frac{a}{2}.\frac{b-c}{b+c}$ (a)

(hay $MD = \frac{BC}{2} - DC = \frac{a}{2} - \frac{ab}{b+c} = -\frac{a}{2}.\frac{b-c}{b+c}$) (a')

Từ (*),(**),(***) và (a) hoặc (a') suy ra

$$MD = \pm\frac{P.\sin A}{\sin A + \sin B + \sin C}.\frac{\dfrac{2P(\sin B - \sin C)}{\sin A + \sin B + \sin C}}{\dfrac{2P(\sin B + \sin C)}{\sin A + \sin B + \sin C}}$$

Hay $MD = \pm\frac{P.\sin A}{\sin A + \sin B + \sin C}.\frac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C}$

Mà $S_{\Delta AMD} = \pm\frac{1}{2}MD.AH$

$$= \pm\frac{1}{2.}.\frac{P.\sin A}{\sin A + \sin B + \sin C}.\frac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C}.\frac{2P.\sin B.\sin C}{\sin A + \sin B + \sin C}$$

Suy ra $S_A = \left| P^2.\frac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C}.\frac{\sin A.\sin B.\sin C}{(\sin A + \sin B + \sin C)^2} \right|$ (đpcm)

***<u>HỆ QUẢ:</u>** Nếu R là bán kính đường tròn ngoại tiếp và r là bán kính đường tròn nội tiếp của ΔABC thì $r = 2R.\frac{\sin A.\sin B.\sin C}{\sin A + \sin B + \sin C}$

<u>Chứng minh:</u> Từ 5) và 6) của Định lý 1. Suy ra $r = 2R.\frac{\sin A.\sin B.\sin C}{\sin A + \sin B + \sin C}$

***<u>ĐỊNH LÝ 2:</u>**

Với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC, ta đều có:

1) $S_{\Delta ABC} = 2R^2\sin A.\sin B.\sin C$

2) h_a = 2R.sinB.sinC; h_b = 2R.sinA.sinC; h_c = 2R.sinA.sinB

(h_a , h_b , h_c : là các chiều cao tương ứng kẻ từ A, B, C)

3) $m_a = R\sqrt{2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A}$; $m_b = R\sqrt{2\sin^2 A + 2\sin^2 C - \sin^2 B}$

$m_c = R\sqrt{2\sin^2 A + 2\sin^2 B - \sin^2 C}$

(m_a; m_b; m_c : Độ dài các đường trung tuyến kẻ từ A, B, C)

4) $f_a = \dfrac{2R}{\sin\dfrac{A}{2}(\sin B+\sin C)}.\sin A.\sin B.\sin C$;

$f_b = \dfrac{2R}{\sin\dfrac{B}{2}(\sin A+\sin C)}.\sin A.\sin B.\sin C$;

$f_c = \dfrac{2R}{\sin\dfrac{C}{2}(\sin A+\sin B)}.\sin A.\sin B.\sin C$;

(f_a; f_b; f_c : Độ dài các đường phân giác trong kẻ từ A, B, C)

5) Gọi S_A, S_B, S_C lần lượt là diện tích tam giác tạo bởi đường trung tuyến, đường phân giác của đỉnh A, B, C với cạnh BC, AC, AB. Ta có

$S_A = \left|R^2.\dfrac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}.\sin A.\sin B.\sin C\right|$;

$S_B = \left|R^2.\dfrac{\sin A-\sin C}{\sin A+\sin C}.\sin A.\sin B.\sin C\right|$;

$S_C = \left|R^2.\dfrac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}.\sin A.\sin B.\sin C\right|$

Chứng minh: (Dựa vào định lý 1)

Theo định lý 1: Ta có $R = \dfrac{P}{\sin A+\sin B+\sin C}$

1) Theo định lý 1: $S_{\Delta ABC} = 2P^2\dfrac{\sin A.\sin B.\sin C}{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}$

$$= 2.\sin A.\sin B.\sin C.\left(\frac{P}{\sin A+\sin B+\sin C}\right)^2$$

$$= 2R^2\sin A.\sin B.\sin C$$ (đpcm)

2) Theo định lý 1: $h_a = 2P.\dfrac{\sin B.\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}$

$$= 2.\sin B.\sin C.\frac{P}{\sin A+\sin B+\sin C}$$

$$= 2.R.\sin B.\sin C \text{ (đpcm)}$$

3) Theo định lý 1:

$$m_a = \frac{P}{\sin A+\sin B+\sin C}.\sqrt{2\sin^2 B+2\sin^2 C-\sin^2 A}$$

$$= R.\sqrt{2\sin^2 B+2\sin^2 C-\sin^2 A} \text{ (đpcm)}$$

4) Theo định lý 1:

$$f_a = \frac{2P}{\sin\frac{A}{2}(\sin B+\sin C)}.\frac{\sin A.\sin B.\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}$$

$$= \frac{\sin A.\sin B.\sin C}{\sin\frac{A}{2}(\sin B+\sin C)}.\frac{2P}{\sin A+\sin B+\sin C}$$

$$= \frac{2R}{\sin\frac{A}{2}(\sin B+\sin C)}.\sin A.\sin B.\sin C \text{ (đpcm)}$$

5) Theo định lý 1:

$$S_A = \left|P^2.\frac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}.\frac{\sin A.\sin B.\sin C}{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}\right|$$

$$= \left|\left(\frac{P}{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}\right)^2.\frac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}.\sin A.\sin B.\sin C\right|$$

$$= \left|R^2.\frac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}.\sin A.\sin B.\sin C\right| \text{ (đpcm)}$$

***<u>ĐỊNH LÝ 3:</u>**

Với r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC, ta đều có:

1) $S_{\Delta ABC} = \frac{r^2}{2}.\frac{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}{\sin A.\sin B.\sin C}$

2) $h_a = \frac{r}{\sin A}.(\sin A + \sin B + \sin C)$;

$h_b = \frac{r}{\sin B}.(\sin A + \sin B + \sin C)$

$h_c = \frac{r}{\sin C}.(\sin A + \sin B + \sin C)$

(h_a , h_b , h_c : là các chiều cao tương ứng kẻ từ A, B, C)

3) $m_a = \frac{r}{2}.\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A.\sin B.\sin C}\sqrt{2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A}$

$m_b = \frac{r}{2}.\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A.\sin B.\sin C}\sqrt{2\sin^2 A + 2\sin^2 C - \sin^2 B}$

$m_c = \frac{r}{2}.\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A.\sin B.\sin C}\sqrt{2\sin^2 A + 2\sin^2 B - \sin^2 C}$

(m_a; m_b; m_c : Độ dài các đường trung tuyến kẻ từ A, B, C)

4) $f_a = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}(\sin B + \sin C)}.(\sin A + \sin B + \sin C)$

$f_b = \frac{r}{\sin\frac{B}{2}(\sin A + \sin C)}.(\sin A + \sin B + \sin C)$

$f_c = \frac{r}{\sin\frac{C}{2}(\sin A + \sin B)}.(\sin A + \sin B + \sin C)$

(f_a; f_b; f_c : Độ dài các đường phân giác trong kẻ từ A, B, C)

5) Gọi S_A, S_B, S_C lần lượt là diện tích tam giác tạo bởi đường trung tuyến, đường phân giác của đỉnh A, B, C với cạnh BC, AC, AB. Ta có

$S_A = \left|\frac{r^2}{4}.\frac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C}.\frac{(\sin A + \sin B + \sin C)^2}{\sin A.\sin B.\sin C}\right|$

$S_B = \left|\frac{r^2}{4}.\frac{\sin A - \sin C}{\sin A + \sin C}.\frac{(\sin A + \sin B + \sin C)^2}{\sin A.\sin B.\sin C}\right|$

$S_C = \left|\frac{r^2}{4}.\frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B}.\frac{(\sin A + \sin B + \sin C)^2}{\sin A.\sin B.\sin C}\right|$

Chứng minh: (Dựa vào hệ quả của định lý 1 và định lý 2)

Theo hệ quả định lí 1: Ta có $r = 2R.\frac{\sin A.\sin B.\sin C}{\sin A + \sin B + \sin C}$

Suy ra $R = \frac{r}{2}.\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A.\sin B.\sin C}$

1) Theo định lí 2:

$$S_{\Delta ABC} = 2R^2 \sin A.\sin B.\sin C$$

$$= 2.\frac{r^2}{4}.\left(\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A.\sin B.\sin C}\right)^2.\sin A.\sin B.\sin C$$

$$= \frac{r^2}{2}.\frac{\left(\sin A + \sin B + \sin C\right)^2}{\sin A.\sin B.\sin C} \text{ (đpcm)}$$

2) Theo định lí 2: h_a = 2R.sinB.sinC

$$= 2.\frac{r}{2}.\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A.\sin B.\sin C}.\sin B.\sin C$$

$$= \frac{r}{\sin A}.(\sin A + \sin B + \sin C) \text{ (đpcm)}$$

3) Theo định lí 2:

$$m_a = R\sqrt{2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A}$$

$$= \frac{r}{2}.\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A.\sin B.\sin C}.\sqrt{2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A} \text{ (đpcm).}$$

4) Theo định lí 2:

$$f_a = \frac{2R}{\sin\frac{A}{2}(\sin B + \sin C)}.\sin A.\sin B.\sin C$$

$$= \frac{2.\frac{r}{2}.\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A.\sin B.\sin C}}{\sin\frac{A}{2}(\sin B + \sin C)}.\sin A.\sin B.\sin C$$

$$= \frac{r}{\sin\frac{A}{2}(\sin B + \sin C)}.(\sin A + \sin B + \sin C) \text{ (đpcm)}$$

5) Theo định lí 2: $S_A = \left| R^2.\frac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C}.\sin A.\sin B.\sin C \right|$

$$= \left| \frac{r^2}{4}.\left(\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A.\sin B.\sin C}\right)^2.\frac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C}.\sin A.\sin B.\sin C \right|$$

$$= \left| \frac{r^2}{4}.\frac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C}.\frac{(\sin A + \sin B + \sin C)^2}{\sin A.\sin B.\sin C} \right| \text{ (đpcm)}$$

*** <u>ĐỊNH LÝ 4:</u>**

Tỉ số diện tích giữa hình tròn nội tiếp và hình tròn ngoại tiếp ΔABC.

Kí hiệu: TS_O^I. Khi đó $TS_O^I = 4.\left(\frac{\sin A.\sin B.\sin C}{\sin A + \sin B + \sin C}\right)^2$

Chứng minh: *(Sử dụng định lý 1)*

Gọi S_1 là diện tích hình tròn nội tiếp ΔABC

Gọi S_2 là diện tích hình tròn ngoại tiếp ΔABC

Ta có $S_1 = \pi r^2$; $S_2 = \pi R^2$

Do đó $TS_O^I = \frac{S_1}{S_2} = \frac{r^2}{R^2} = \frac{4P^2\frac{(\sin A.\sin B.\sin C)^2}{(\sin A + \sin B + \sin C)^4}}{\frac{P^2}{(\sin A + \sin B + \sin C)^2}}$ (theo định lý 1)

$$= 4.\left(\frac{\sin A.\sin B.\sin C}{\sin A + \sin B + \sin C}\right)^2 \text{ (đpcm)}$$

Vậy: $TS_O^I = 4.\left(\frac{\sin A.\sin B.\sin C}{\sin A + \sin B + \sin C}\right)^2$

***Hệ quả 1**: Nếu ΔABC là tam giác đều thì $TS_O^I = \frac{1}{4}$

Chứng minh: *(sử dụng định lý 4)*

Theo định lý 4, ta có $TS_O^I = 4.\left(\frac{\sin A.\sin B.\sin C}{\sin A + \sin B + \sin C}\right)^2$

Mà ΔABC đều suy ra

$$TS_O^I = 4.\left(\frac{\sin^3 A}{3\sin A}\right)^2 = 4.\left(\frac{\sin^3 60^0}{3\sin 60^0}\right)^2 = 4.\left(\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{3}\right)^2 = 4.\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Vậy $TS_O^I = \frac{1}{4}$ (đpcm)

***Hệ quả 2:** Nếu $TS_O^I = \frac{1}{4}$ thì tam giác đó là tam giác đều.

***<u>ĐỊNH LÝ 5:</u>**

Tỉ số diện tích tam giác ABC với hình tròn ngoại tiếp của tam giác đó, kí hiệu là TS_O^Δ. Khi đó: $TS_O^\Delta = \frac{2}{\pi}.\sin A.\sin B.\sin C$.

Chứng minh:

Theo định lí 2, ta có $S_{\Delta ABC} = 2R^2 \sin A.\sin B.\sin C$

Do đó $TS_O^\Delta = \frac{2R^2 \sin A.\sin B.\sin C}{\pi R^2} = \frac{2}{\pi}.\sin A.\sin B.\sin C$ (đpcm)

***<u>ĐỊNH LÝ 6:</u>**

Tỉ số diện tích tam giác ABC với hình tròn nội tiếp của tam giác đó, kí hiệu là TS_I^Δ. Khi đó: $TS_I^\Delta = \frac{1}{2\pi}.\frac{(\sin A + \sin B + \sin C)^2}{\sin A.\sin B.\sin C}$.

Chứng minh:

Ta có $TS_I^{\Delta} = \dfrac{\dfrac{r^2}{2}.\dfrac{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}{\sin A.\sin B.\sin C}}{r^2\pi}$

$$= \frac{1}{2\pi}.\frac{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}{\sin A.\sin B.\sin C} \text{ (đpcm)}$$

*** <u>ĐỊNH LÝ 7:</u>**

Tỉ số diện tích phần giới hạn bởi đường trung tuyến, đường phân giác của đỉnh A với cạnh BC của ΔABC đối với diện tích ΔABC. Kí hiệu: TS_{ABC}^{A}.

Khi đó $TS_{ABC}^{A} = \dfrac{1}{2}.\left|\dfrac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}\right|$

Chứng minh:*(sử dụng định lý1 hoặc định lý 2 hoặc định lý 3)*

Theo định lý 1 ta có $S_A = \left|P^2.\dfrac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}.\dfrac{\sin A.\sin B.\sin C}{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}\right|$

$$S_{\Delta ABC} = 2P^2\frac{\sin A.\sin B.\sin C}{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}$$

Suy ra $TS_{ABC}^{A} = \dfrac{S_A}{S_{\Delta ABC}} = \dfrac{1}{2}.\left|\dfrac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}\right|$ (đpcm)

***Hệ quả 1**: Tam giác ABC cân tại A $\Leftrightarrow TS_{ABC}^{A} = 0$

Chứng minh: (sử dụng định lý 5)

Theo định lý 5, ta có $TS_{ABC}^{A} = \dfrac{1}{2}.\left|\dfrac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}\right| = 0$ mà sinB + sinC $\neq 0$

$\Leftrightarrow$ sinB – sinC = 0 $\Leftrightarrow B = C$

Vậy ΔABC cân tại A

***Hệ quả 2**: Nếu $TS_{ABC}^{A} = TS_{ABC}^{B} = 0$ thì ΔABC là tam giác đều.

*** <u>ĐỊNH LÝ 8:</u>**

Tỉ số diện tích được giới hạn bởi đường tròn nội tiếp và các cạnh của tam giác đối với diện tích được giới hạn bởi đường tròn ngoại tiếp và các cạnh của tam giác ABC. Kí hiệu: $^*TS_O^I$.

Khi đó $^{*}TS_O^I = \dfrac{2t(x^2 - 2\pi t)}{x^2(\pi - 2t)}$

(với t = sinA.sinB.sinC và x = sinA + sinB + sinC)

Chứng minh: *(Áp dụng định lý 1 và hệ quả định lý 1)*

Gọi S_1 là diện tích được giới hạn bởi đường tròn nội tiếp và các cạnh của ΔABC

Gọi S_2 là diện tích được giới hạn bởi đường tròn ngoại tiếp và các cạnh của ΔABC

Ta có $S_1 = S_\Delta - S_I = 2P^2.\dfrac{\sin A.\sin B.\sin C}{(\sin A + \sin B + \sin C)^2} - \pi.\dfrac{(2P\sin A.\sin B.\sin C)^2}{(\sin A + \sin B + \sin C)^4}$

Đặt t = sinA.sinB.sinC và x = sinA + sinB + sinC

$$\Rightarrow S_1 = \frac{2P^2t}{x^2} - \pi.\frac{4P^2t^2}{x^4} = \frac{2P^2tx^2 - \pi 4P^2t^2}{x^4} = \frac{2P^2t(x^2 - \pi t)}{x^4} \quad (*)$$

$$S_2 = S_O - S_\Delta = \pi R^2 - S_\Delta$$

$$= \pi.\frac{P^2}{(\sin A + \sin B + \sin C)^2} - 2P^2.\frac{\sin A.\sin B.\sin C}{(\sin A + \sin B + \sin C)^2}$$

$$= \frac{\pi P^2}{x^2} - \frac{2P^2t}{x^2} = \frac{P^2(\pi - 2t)}{x^2} \quad (**)$$

Từ (*) và (**) suy ra $^{*}TS_O^I = \dfrac{2t(x^2 - 2\pi t)}{x^2(\pi - 2t)}$ (đpcm)

***<u>ĐỊNH LÝ 9:</u>**

Tỉ số đường cao và đường phân giác cùng đỉnh A của ΔABC. Kí hiệu: $T_{f_a}^{h_a}$ thế thì $T_{f_a}^{h_a} = \dfrac{\sin B + \sin C}{2\cos\dfrac{A}{2}}$

Chứng minh: *(sử dung định lý 1 hoặc 2 hoặc 3)*

Theo định lý 2, ta có

h_a = 2R.sinB.sinC và f_a = $\dfrac{2R}{\sin\dfrac{A}{2}(\sin B+\sin C)}.\sin A.\sin B.\sin C$

Suy ra $T_{f_a}^{h_a} = \dfrac{h_a}{f_a} = \dfrac{\sin\dfrac{A}{2}(\sin B+\sin C)}{\sin A}$

$$= \frac{\sin\dfrac{A}{2}(\sin B+\sin C)}{2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}} = \frac{(\sin B+\sin C)}{2\cos\dfrac{A}{2}} \text{ (đpcm)}$$

***<u>ĐỊNH LÝ 10:</u>**

Tỉ số đường cao và đường trung tuyến cùng đỉnh A của ΔABC. Kí hiệu: $T_{m_a}^{h_a}$.Thế thì $T_{m_a}^{h_a} = \dfrac{2\sin B.\sin C}{\sqrt{2\sin^2 B+2\sin^2 C-\sin^2 A}}$

Chứng minh: *(sử dung định lý 1 hoặc 2 hoặc 3)*

Theo định lý 2, ta có

h_a = 2R.sinB.sinC và m_a = R$\sqrt{2\sin^2 B+2\sin^2 C-\sin^2 A}$

Suy ra $T_{m_a}^{h_a} = \dfrac{h_a}{m_a} = \dfrac{2\sin B.\sin C}{\sqrt{2\sin^2 B+2\sin^2 C-\sin^2 A}}$ (đpcm)

***<u>ĐỊNH LÝ 11:</u>**

Tỉ số đường phân giác và đường trung tuyến cùng đỉnh A của ΔABC. Kí hiệu: $T_{m_a}^{f_a}$.Thế thì $T_{m_a}^{f_a} = \dfrac{\sin B.\sin C}{\sin B+\sin C}.\dfrac{4\cos\dfrac{A}{2}.}{\sqrt{2\sin^2 B+2\sin^2 C-\sin^2 A}}$

Chứng minh: *(sử dung định lý 1 hoặc 2 hoặc 3)*

Theo định lý 2, ta có f_a = $\dfrac{2R}{\sin\dfrac{A}{2}(\sin B+\sin C)}.\sin A.\sin B.\sin C$

và m_a = R$\sqrt{2\sin^2 B+2\sin^2 C-\sin^2 A}$

Suy ra $T_{m_a}^{f_a} = \dfrac{2\sin A.\sin B.\sin C}{\sin\dfrac{A}{2}(\sin B+\sin C)}.\dfrac{1}{\sqrt{2\sin^2 B+2\sin^2 C-\sin^2 A}}$

$$=\frac{\sin B.\sin C}{\sin B+\sin C}.\frac{4\cos\dfrac{A}{2}.}{\sqrt{2\sin^2 B+2\sin^2 C-\sin^2 A}} \text{ (đpcm)}$$

*<u>**ĐỊNH LÝ 12:**</u> TS_O^I, TS_O^Δ, TS_I^Δ, TS_{ABC}^A, $T_{f_a}^{h_a}$, $T_{m_a}^{h_a}$, $T_{m_a}^{f_a}$ chỉ phụ thuộc vào số đo các góc của tam giác.

Chứng minh: Từ định lý 4, 5, 6, 7, 8, 9,10,11 suy ra điều phải chứng minh.

*<u>**ĐỊNH LÝ 13:**</u> ***(**Dấu hiệu nhận biết tam giác cân)*

$$\Delta\text{ABC cân tại A} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} T_{f_a}^{h_a}=1 \\ T_{m_a}^{h_a}=1 \\ T_{m_a}^{f_a}=1 \end{array}\right.$$

Chứng minh:

$\Rightarrow$) Nếu ΔABC cân tại A thì $f_a = m_a = h_a$.

Do đó $T_{f_a}^{h_a} = T_{m_a}^{h_a} = T_{m_a}^{f_a} = 1$ (đpcm)

$\Leftarrow$) + Nếu $T_{f_a}^{h_a}=1$ thì ΔABC cân tại A

Theo định lý 7, ta có $T_{f_a}^{h_a} = \dfrac{\sin B+\sin C}{2\cos\dfrac{A}{2}} = 1$

$$\Leftrightarrow \sin B+\sin C = 2\cos\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin B+\sin C = 2\cos\frac{180^0-(B+C)}{2}$$

$$=2\cos\left(90^0-\left(\frac{B+C}{2}\right)\right)=2\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{B+C}{2}.\cos\frac{\text{B-C}}{2}=2\sin\frac{B+C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{B-C}{2} = 1 = \cos 0^0$$

$$\Leftrightarrow B = C$$

Vậy ΔABC cân tại A.

+ Nếu $T_{m_a}^{h_a} = 1$ thì ΔABC cân tại A

Theo định lý 8, ta có

$$T_{m_a}^{h_a} = \frac{2\sin B.\sin C}{\sqrt{2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A}} = 1$$

$$\Leftrightarrow 2\sin B.\sin C = \sqrt{2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A}$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2 B.\sin^2 C = 2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos(B-C)-\cos(B+C)\right)^2 = 2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2(B+C)$$

$$\Leftrightarrow \cos^2(B-C) + \cos^2(B+C) - 2.\cos(B-C).\cos(B+C) - 2\sin^2 B + 2\sin^2 C + \sin^2(B+C) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2(B-C) - 2.\cos(B-C).\cos(B+C) - 2\sin^2 B - 2\sin^2 C + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2(B-C) - 2.\cos(B-C).\cos(B+C) - 1 + \cos 2B - 1 + \cos 2C + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2(B-C) - 1 - 2.\cos(B-C).\cos(B+C) + \cos 2B + \cos 2C = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2(B-C) - 1 - 2.\cos(B-C).\cos(B+C) + 2\cos(B+C).\cos(B-C) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2(B-C) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(B-C) = 1 = \cos 0^0$$

$$\Leftrightarrow B - C = 0^0 \Leftrightarrow B = C$$

Vậy ΔABC cân tại A.

<u>ĐỊNH LÝ 14:</u> *(Dấu hiệu nhận biết tam giác cân)*

$$\Delta \text{ABC cân tại C} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} T_{f_a}^{h_a} = T_{f_b}^{h_b} \\ T_{m_a}^{h_a} = T_{m_b}^{h_b} \\ T_{m_a}^{f_a} = T_{m_b}^{f_b} \end{array}\right.$$

Chứng minh:

$\Rightarrow$) Nếu ΔABC cân tại C thì $f_a = f_b$; $m_a = m_b$; $h_a = h_b$. Do đó $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} T_{f_a}^{h_a} = T_{f_b}^{h_b} \\ T_{m_a}^{h_a} = T_{m_b}^{h_b} \\ T_{m_a}^{f_a} = T_{m_b}^{f_b} \end{array}\right.$

$\Leftarrow$) + Nếu $T_{f_a}^{h_a} = T_{f_b}^{h_b}$ thì ΔABC cân tại C

Thật vậy, $T_{f_a}^{h_a} = T_{f_b}^{h_b} \Leftrightarrow \dfrac{\sin B + \sin C}{2\cos\dfrac{A}{2}} = \dfrac{\sin A + \sin C}{2\cos\dfrac{B}{2}}$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin\left(\dfrac{B+C}{2}\right).\cos\left(\dfrac{\text{B-C}}{2}\right)}{2\sin\left(\dfrac{B+C}{2}\right)} = \frac{2\sin\left(\dfrac{A+C}{2}\right).\cos\left(\dfrac{\text{A-C}}{2}\right)}{2\sin\left(\dfrac{A+C}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\text{B-C}}{2}\right) = \cos\left(\frac{\text{A-C}}{2}\right) \Leftrightarrow B - C = A - C$$

$$\Leftrightarrow B = A$$

Vậy ΔABC cân tại C

***ĐỊNH LÝ 15:** (Dấu hiệu nhận biết tam giác đều)*

$$\Delta\text{ABC đều} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} T_{f_a}^{h_a} = T_{f_b}^{h_b} = T_{fc}^{h_c} \\ T_{m_a}^{h_a} = T_{m_b}^{h_b} = T_{m_c}^{h_c} \\ T_{m_a}^{f_a} = T_{m_b}^{f_b} = T_{m_c}^{f_c} \end{array}\right.$$

Chứng minh: Dựa vào định lý 14

***ĐỊNH LÝ 16:**

Tỉ số chu vi của tam giác với đường tròn nội tiếp ΔABC. Kí hiệu: TC_I^{Δ}.

Khi đó: $TC_I^{\Delta} = \dfrac{1}{2\pi}.\dfrac{(\sin A + \sin B + \sin C)^2}{\sin A.\sin B.\sin C}$

Chứng minh: *(sử dụng định lí 1)*

Ta có chu vi của ΔABC là 2P.Chu vi của đường tròn nội tiếp ΔABC là 2πr

Mà theo định lí 1, ta có r = 2P. $\frac{\sin A.\sin B.\sin C}{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}$

Do đó $TC_I^\Delta = \frac{2P}{2\pi r} = \frac{P}{\pi r} = \frac{P}{\pi 2P.\frac{\sin A.\sin B.\sin C}{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}} = \frac{1}{2\pi}.\frac{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}{\sin A.\sin B.\sin C}$ (đpcm)

***<u>ĐỊNH LÝ 17:</u>**

Tỉ số chu vi của tam giác với đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Kí hiệu: TC_O^Δ.Khi đó: $TC_O^\Delta = \frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\pi}$

Chứng minh: *(sử dụng định lí 1)*

Ta có chu vi của ΔABC là 2P.Chu vi của đường tròn nội tiếp ΔABC là 2πR

Mà theo định lí 1, ta có R = $\frac{P}{\sin A+\sin B+\sin C}$

Do đó $TC_O^\Delta = \frac{2P}{2\pi R} = \frac{P}{\pi R} = \frac{P}{\pi\frac{P}{\sin A+\sin B+\sin C}} = \frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\pi}$ (đpcm)

***<u>ĐỊNH LÝ 18:</u>**

Tỉ số chu vi của đường tròn nội tiếp với chu vi của đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Kí hiệu: TC_O^I.Khi đó: $TC_O^I = 2.\frac{\sin A.\sin B.\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}$.

Chứng minh: *(sử dụng định lí 1 và hệ quả của định lý 1)*

Ta có: Chu vi của đường tròn nội tiếp ΔABC là 2πr.

Chu vi của đường tròn nội tiếp ΔABC là 2πR

Mà theo hệ quả của định lý 1, ta có $r = 2R.\frac{\sin A.\sin B.\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}$

Do đó $TC_O^I = 2.\frac{\sin A.\sin B.\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}$ (đpcm)

***<u>ĐỊNH LÝ 19:</u>**

TC_I^{Δ}, TC_O^{Δ}, TC_O^{I} chỉ phụ thuộc vào số đo các góc của tam giác

Chứng minh: Từ định lý 16, 17, 18 . Suy ra (đpcm)

***<u>ĐỊNH LÝ 20:</u>**

Tỉ số diện tích giữa hình tròn nội tiếp và ngoại tiếp của tam giác bằng bình phương tỉ số chu vi của hai đường tròn đó.

Chứng minh:

Theo định lý 4, ta có $TS_O^I = 4.\left(\dfrac{\sin A.\sin B.\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}\right)^2$

Theo định lý 16, ta có $TC_O^I = 2.\dfrac{\sin A.\sin B.\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}$

Do đó $TS_O^I = \left(TC_O^I\right)^2$ (đpcm)

Chứng minh cách khác:

Ta có $TS_O^I = \dfrac{\pi r^2}{\pi R^2} = \dfrac{r^2}{R^2}$ và $TC_O^I = \dfrac{2\pi r}{2\pi R} = \dfrac{r}{R}$. Do đó $TS_O^I = \left(TC_O^I\right)^2$ (đpcm)

***<u>ĐỊNH LÝ 21:</u>** Tỉ số diện tích giữa tam giác với hình tròn nội tiếp của tam giác đó bằng tỉ số chu vi giữa tam giác với đường tròn nội tiếp của tam giác đó.

Chứng minh:

Theo định lí 16 ta có: $TC_I^{\Delta} = \dfrac{1}{2\pi}.\dfrac{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}{\sin A.\sin B.\sin C}$

Theo định lí 6 ta có: $TS_I^{\Delta} = \dfrac{1}{2\pi}.\dfrac{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}{\sin A.\sin B.\sin C}$

Do đó: $TS_I^{\Delta} = TC_I^{\Delta}$ (đpcm)

Chứng minh cách khác:

Ta có $TC_I^{\Delta} = \dfrac{2p}{2\pi r} = \dfrac{p}{\pi r}$ và $TS_I^{\Delta} = \dfrac{pr}{\pi r^2} = \dfrac{p}{\pi r}$. Do đó $TS_I^{\Delta} = TC_I^{\Delta}$ (đpcm)

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho ΔABC, biết $B = 30^0 15'$, $C = 54^0 25'$, chu vi của tam giác bằng 107 cm. Kẻ đường cao AH, trung tuyến AM, phân giác AD (H, M, D$\in$BC). Tính:

1.Diện tích tam giác ABC

2.Đường cao AH

3.Độ dài đường trung tuyến AM

4.Độ dài đường phân giác AD

5.Diện tích tam giác ADM

6.Bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC

7.Bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC

8.Tỉ số diện tích hình tròn nội tiếp và hình tròn ngoại tiếp ΔABC

9.Tỉ số diện tích tam giác ABC với hình tròn ngoại tiếp của tam giác đó.

10.Tỉ số diện tích tam giác ABC với hình tròn nội tiếp của tam giác đó.

11.Tỉ số diện tích phần giới hạn bởi AD, AM và BC đối với diện tích ΔABC

12.Tỉ số diện tích giới hạn bởi đường tròn nội tiếp và các cạnh của tam giác đối với diện tích được giới hạn bởi đường tròn ngoại tiếp và các cạnh của ΔABC

13.Tỉ số đường cao AH với đường phân giác AD

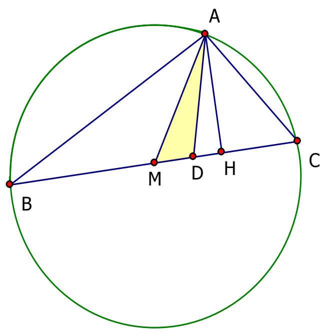
14.Tỉ số đường cao AH với đường đường trung tuyến AM

15.Tỉ số đường phân giác AD với đường trung tuyến AM

16.Tỉ số chu vi của tam giác ΔABC đối với đường tròn nội tiếp ΔABC

17.Tỉ số chu vi của tam giác ΔABC đối với đường tròn ngoại tiếp ΔABC

18.Tỉ số chu vi đường tròn nội tiếp của tam giác ΔABC đối với đường tròn ngoại tiếp ΔABC.



Giải:

Áp dụng định lí 1:(từ câu 1 đến câu 7)

1. Diện tích ΔABC là:

$$S_{\Delta ABC} = 2P^2\frac{\sin A.\sin B.\sin C}{(\sin A+\sin B+\sin C)^2} = \mathbf{436{,}5959179}\ (\text{cm}^2)$$

2. Đường cao AH là:

$$\text{AH} = 2P.\frac{\sin B.\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C} = \mathbf{18{,}95536741}\ (\text{cm})$$

3. Độ dài trung tuyến AM là:

$$\text{AM} = \frac{P}{\sin A+\sin B+\sin C}.\sqrt{2\sin^2 B+2\sin^2 C-\sin^2 A}$$

$$= \mathbf{21{,}18951849}\ (\text{cm})$$

4. Độ dài đường phân giác AD là:

$$\text{AD} = \frac{2P}{\sin\frac{A}{2}(\sin B+\sin C)}.\frac{\sin A.\sin B.\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C} = \mathbf{19{,}384854494}\ (\text{cm})$$

5. Diện tích ΔADM là:

$$\text{S}_{\text{ADM}} = \left|P^2.\frac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}.\frac{\sin A.\sin B.\sin C}{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}\right| = \mathbf{51{,}29848449}\ (\text{cm})$$

6. Bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC là:

$$\text{R} = \frac{P}{\sin A+\sin B+\sin C} = \mathbf{23{,}132998612}\ (\text{cm})$$

7. Bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC là:

r = $2P.\dfrac{\sin A.\sin B.\sin C}{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}$ = **8,160671362** (cm)

8. Tỉ số diện tích hình tròn nội tiếp và hình tròn ngoại tiếp ΔABC
Áp dụng định lí 4:

$$TS_O^I = 4.\left(\frac{\sin A.\sin B.\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}\right)^2 = \mathbf{0,124448132}$$

9. Tỉ số diện tích tam giác ABC với hình tròn ngoại tiếp của tam giác đó.
Áp dụng định lí 5: $TS_O^{\Delta} = \dfrac{2}{\pi}.\sin A.\sin B.\sin C$ = **0,259696683**

10. Tỉ số diện tích tam giác ABC với hình tròn nội tiếp của tam giác đó.
Áp dụng định lí 6:

$$TS_I^{\Delta} = \frac{1}{2\pi}.\frac{\left(\sin A+\sin B+\sin C\right)^2}{\sin A.\sin B.\sin C} = \mathbf{2,08678651}$$

11. Tỉ số diện tích phần giới hạn bởi AD, AM và BC đối với diện tích ΔABC
Áp dụng định lí 7: $TS_{ABC}^{A} = \dfrac{1}{2}.\left|\dfrac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}\right|$ = **0,117496482**

12. Tỉ số diện tích giới hạn bởi đường tròn nội tiếp và các cạnh của tam giác đối với diện tích được giới hạn bởi đường tròn ngoại tiếp và các cạnh của ΔABC.
Áp dụng định lí 8:

$^{*}TS_O^I = \dfrac{2t(x^2-2\pi t)}{x^2(\pi-2t)}$ với t = sinA.sinB.sinC và x = sinA + sinB + sinC

= **0,182693428**

13. Tỉ số đường cao AH với đường phân giác AD:
Áp dụng định lí 9: $T_{f_a}^{h_a} = \dfrac{\sin B+\sin C}{2\cos\dfrac{A}{2}}$ = **0,977844171**

14. Tỉ số đường cao AH với đường đường trung tuyến AM:
Áp dụng định lí 10:

$$T_{m_a}^{h_a} = \frac{2\sin B.\sin C}{\sqrt{2\sin^2 B+2\sin^2 C-\sin^2 A}} = \mathbf{0,894563386}$$

15. Tỉ số đường phân giác AD với đường trung tuyến AM:
Áp dụng định lí 11:

$$T_{m_a}^{f_a} = \frac{\sin B.\sin C}{\sin B + \sin C}.\frac{4\cos\frac{A}{2}.}{\sqrt{2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A}} = \mathbf{0,914832253}$$

16. Tỉ số chu vi của tam giác ΔABC đối với đường tròn nội tiếp ΔABC.
Áp dụng định lí 16:

$$TC_I^{\Delta} = \frac{1}{2\pi}.\frac{(\sin A + \sin B + \sin C)^2}{\sin A.\sin B.\sin C} = \mathbf{2,08678651}$$

17. Tỉ số chu vi của tam giác ΔABC đối với đường tròn ngoại tiếp ΔABC.
Áp dụng định lí 17: $TC_O^{\Delta} = \dfrac{\sin A + \sin B + \sin C}{\pi}$ = **0,736159993**

18. Tỉ số chu vi đường tròn nội tiếp của tam giác ΔABC đối với đường tròn ngoại tiếp ΔABC.
Áp dụng định lí 18:

$$TC_O^I = 2.\frac{\sin A.\sin B.\sin C}{\sin A + \sin B + \sin C} = \mathbf{0,352772068}$$

Bài 2. Cho ΔABC, biết $B = 67^0 22'12''$, $C = 21^0 12'$, bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC là R = 22,121944 cm. Kẻ đường cao AH, trung tuyến AM, phân giác AD (H, M, D$\in$BC). Tính :

1.Diện tích tam giác ABC

2.Đường cao AH

3.Độ dài đường trung tuyến AM

4.Độ dài đường phân giác AD

5.Diện tích tam giác ADM

6.Chu vi của ΔABC

7.Bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC

8.Tỉ số diện tích hình tròn nội tiếp và hình tròn ngoại tiếp ΔABC

9.Tỉ số diện tích tam giác ABC với hình tròn ngoại tiếp của tam giác đó.

10.Tỉ số diện tích tam giác ABC với hình tròn nội tiếp của tam giác đó.

11.Tỉ số diện tích phần giới hạn bởi AD, AM và BC đối với diện tích ΔABC

12.Tỉ số diện tích giới hạn bởi đường tròn nội tiếp và các cạnh của tam giác đối với diện tích được giới hạn bởi đường tròn ngoại tiếp và các cạnh của ΔABC

13.Tỉ số đường cao AH với đường phân giác AD

14.Tỉ số đường cao AH với đường đường trung tuyến AM

15.Tỉ số đường phân giác AD với đường trung tuyến AM

16.Tỉ số chu vi của tam giác ΔABC đối với đường tròn nội tiếp ΔABC

17.Tỉ số chu vi của tam giác ΔABC đối với đường tròn ngoại tiếp ΔABC

18.Tỉ số chu vi đường tròn nội tiếp của tam giác ΔABC đối với đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Giải: Áp dụng định lí 2: :(từ câu 1 đến câu 6)

1.Diện tích tam giác ABC là:

$S_{\Delta ABC} = 2R^2 \sin A.\sin B.\sin C$ = **326,5916689** (cm^2)

2.Đường cao AH là: AH = 2R.sinB.sinC = **14,76784383** (cm)

3.Độ dài đường trung tuyến AM là:

AM = m_a = R$\sqrt{2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A}$ = **21,74327383** (cm)

4.Độ dài đường phân giác AD là:

AD = $\dfrac{2R}{\sin\dfrac{A}{2}(\sin B + \sin C)}.\sin A.\sin B.\sin C$ = **16,05332718** (cm)

5.Diện tích tam giác ADM là:

$S_{ADM} = \left| R^2.\dfrac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C}.\sin A.\sin B.\sin C \right|$ = **71,36021467** (cm^2)

6.Chu vi của ΔABC là:

2P = 2R(sinA + sinB + sinC) = **101,0672869** (cm)

7.Bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC là:

r = $2P.\dfrac{\sin A.\sin B.\sin C}{(\sin A + \sin B + \sin C)^2}$ (hệ quả của định lí 1)

= **6,462856159** (cm)

8.Tỉ số diện tích hình tròn nội tiếp và hình tròn ngoại tiếp ΔABC

Áp dụng định lí 4: $TS_O^I = 4.\left(\dfrac{\sin A.\sin B.\sin C}{\sin A + \sin B + \sin C} \right)^2$ = **0,085349779**

9.Tỉ số diện tích tam giác ABC với hình tròn ngoại tiếp của tam giác đó.

Áp dụng định lí 5: $TS_O^\Delta = \dfrac{2}{\pi}.\sin A.\sin B.\sin C$ = **0,212426479**

10**.**Tỉ số diện tích tam giác ABC với hình tròn nội tiếp của tam giác đó.

Áp dụng định lí 6: $TS_I^\Delta = \dfrac{1}{2\pi}.\dfrac{(\sin A + \sin B + \sin C)^2}{\sin A.\sin B.\sin C}$ = **2,48889313**

11.Tỉ số diện tích phần giới hạn bởi AD, AM và BC đối với diện tích ΔABC

Áp dụng định lí 7: $TS_{ABC}^A = \dfrac{1}{2}.\left| \dfrac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C} \right|$ = **0,218499801**

12.Tỉ số diện tích giới hạn bởi đường tròn nội tiếp và các cạnh của tam giác đối với diện tích được giới hạn bởi đường tròn ngoại tiếp và các cạnh của ΔABC.

Áp dụng định lí 8:

$^*TS_O^I = \dfrac{2t(x^2 - 2\pi t)}{x^2(\pi - 2t)}$ với t = sinA.sinB.sinC và x = sinA + sinB + sinC

= **0,161352174**

13. Tỉ số đường cao AH với đường phân giác AD:

Áp dụng định lí 9: $T_{f_a}^{h_a} = \dfrac{\sin B + \sin C}{2\cos\dfrac{A}{2}}$ = **0,919924179**

14.Tỉ số đường cao AH với đường đường trung tuyến AM:

Áp dụng định lí 10:

$T_{m_a}^{h_a} = \dfrac{2\sin B.\sin C}{\sqrt{2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A}}$ = **0,679191364**

15.Tỉ số đường phân giác AD với đường trung tuyến AM:

Áp dụng định lí 11:

$T_{m_a}^{f_a} = \dfrac{\sin B.\sin C}{\sin B + \sin C}.\dfrac{4\cos\dfrac{A}{2}.}{\sqrt{2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A}}$ = **0,73831233**

16.Tỉ số chu vi của tam giác ΔABC đối với đường tròn nội tiếp ΔABC.

Áp dụng định lí 16:

$TC_I^{\Delta} = \dfrac{1}{2\pi}.\dfrac{(\sin A + \sin B + \sin C)^2}{\sin A.\sin B.\sin C}$ = **2,48889313**

17. Tỉ số chu vi của tam giác ΔABC đối với đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Áp dụng định lí 17: $TC_O^{\Delta} = \dfrac{\sin A + \sin B + \sin C}{\pi}$ = **0,727122277**

18. Tỉ số chu vi đường tròn nội tiếp của tam giác ΔABC đối với đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Áp dụng định lí 18: $TC_O^I = 2.\dfrac{\sin A.\sin B.\sin C}{\sin A + \sin B + \sin C}$ = **0,292146845**

Bài 3. Cho ΔABC, biết $B = 19^0 5'18,90"$, $C = 29^0 19'69"$, bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC là r = 56,1911 cm. Kẻ đường cao AH, trung tuyến AM, phân giác AD (H, M, D $\in$ BC). Tính :

1.Diện tích tam giác ABC

2.Đường cao AH

3.Độ dài đường trung tuyến AM

4.Độ dài đường phân giác AD

5.Diện tích tam giác ADM

6.Chu vi của ΔABC

7.Bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC

8.Tỉ số diện tích hình tròn nội tiếp và hình tròn ngoại tiếp ΔABC

9.Tỉ số diện tích tam giác ABC với hình tròn ngoại tiếp của tam giác đó.

10.Tỉ số diện tích tam giác ABC với hình tròn nội tiếp của tam giác đó.

11.Tỉ số diện tích phần giới hạn bởi AD, AM và BC đối với diện tích ΔABC

12.Tỉ số diện tích giới hạn bởi đường tròn nội tiếp và các cạnh của tam giác đối với diện tích được giới hạn bởi đường tròn ngoại tiếp và các cạnh của ΔABC

13.Tỉ số đường cao AH với đường phân giác AD

14.Tỉ số đường cao AH với đường đường trung tuyến AM

15.Tỉ số đường phân giác AD với đường trung tuyến AM

16.Tỉ số chu vi của tam giác ΔABC đối với đường tròn nội tiếp ΔABC

17.Tỉ số chu vi của tam giác ΔABC đối với đường tròn ngoại tiếp ΔABC

18.Tỉ số chu vi đường tròn nội tiếp của tam giác ΔABC đối với đường tròn ngoại tiếp ΔABC

Giải: Áp dụng định lí 3: :(từ câu 1 đến câu 5)

1.Diện tích tam giác ABC là:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{r^2}{2}.\frac{(\sin A + \sin B + \sin C)^2}{\sin A.\sin B.\sin C} = \mathbf{32261{,}70457}\ (\text{cm}^2)$$

2.Đường cao AH là:

$$h_a = \frac{r}{\sin A}.(\sin A + \sin B + \sin C) = \mathbf{117{,}555759}\ (\text{cm})$$

3.Độ dài đường trung tuyến AM là:

$$m_a = \frac{r}{2}.\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A.\sin B.\sin C}\sqrt{2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A}$$

$$= \mathbf{134{,}4563574}\ (\text{cm})$$

4.Độ dài đường phân giác AD là:

$$f_a = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}(\sin B + \sin C)}.(\sin A + \sin B + \sin C)$$

$$= \mathbf{118{,}0273577}\ (\text{cm})$$

5.Diện tích tam giác ADM là:

$$S_A = \left|\frac{r^2}{4}.\frac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C}.\frac{(\sin A + \sin B + \sin C)^2}{\sin A.\sin B.\sin C}\right| = \mathbf{3216{,}429857}\ (\text{cm}^2)$$

6.Chu vi của ΔABC .

Ta có r = $2P.\frac{\sin A.\sin B.\sin C}{(\sin A + \sin B + \sin C)^2}$ (định lí 1)

Suy ra $2P = \frac{r.(\sin A + \sin B + \sin C)^2}{\sin A.\sin B.\sin C}$ = **1148,285211** (cm)

7.Bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Ta có $r = 2R.\frac{\sin A.\sin B.\sin C}{\sin A + \sin B + \sin C}$ (Hệ quả định lí 1)

Suy ra $R = \frac{r}{2}.\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A.\sin B.\sin C}$ = **336,8553031** (cm)

8. Tỉ số diện tích hình tròn nội tiếp và hình tròn ngoại tiếp ΔABC

Áp dụng định lí 4: $TS_O^I = 4.\left(\frac{\sin A.\sin B.\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}\right)^2$ = **0,023460943**

9. Tỉ số diện tích tam giác ABC với hình tròn ngoại tiếp của tam giác đó.

Áp dụng định lí 5: $TS_O^\Delta = \frac{2}{\pi}.\sin A.\sin B.\sin C$ = **0,076304092**

10**.**Tỉ số diện tích tam giác ABC với hình tròn nội tiếp của tam giác đó.

Áp dụng định lí 6: $TS_I^\Delta = \frac{1}{2\pi}.\frac{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}{\sin A.\sin B.\sin C}$ = **3,252388144**

11.Tỉ số diện tích phần giới hạn bởi AD, AM và BC đối với diện tích ΔABC

Áp dụng định lí 7: $TS_{ABC}^A = \frac{1}{2}.\left|\frac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}\right|$ = **0,099698075**

12.Tỉ số diện tích giới hạn bởi đường tròn nội tiếp và các cạnh của tam giác đối với diện tích được giới hạn bởi đường tròn ngoại tiếp và các cạnh của ΔABC.

Áp dụng định lí 8:

$^*TS_O^I = \frac{2t(x^2-2\pi t)}{x^2(\pi-2t)}$ với t = sinA.sinB.sinC và x = sinA + sinB + sinC

= **0,57208383**

13.Tỉ số đường cao AH với đường phân giác AD:

Áp dụng định lí 9: $T_{f_a}^{h_a} = \frac{\sin B+\sin C}{2\cos\frac{A}{2}}$ = **0,996004326**

14.Tỉ số đường cao AH với đường đường trung tuyến AM:

Áp dụng định lí 10:

$T_{m_a}^{h_a} = \frac{2\sin B.\sin C}{\sqrt{2\sin^2 B+2\sin^2 C-\sin^2 A}}$ = **0,874304206**

15.Tỉ số đường phân giác AD với đường trung tuyến AM:

Áp dụng định lí 11:

$$T_{m_a}^{f_a} = \frac{\sin B.\sin C}{\sin B+\sin C}.\frac{4\cos\frac{A}{2}.}{\sqrt{2\sin^2 B+2\sin^2 C-\sin^2 A}}$$ = **0,877815914**

16.Tỉ số chu vi của tam giác ΔABC đối với đường tròn nội tiếp ΔABC.

Áp dụng định lí 16:

$$TC_I^{\Delta} = \frac{1}{2\pi}.\frac{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}{\sin A.\sin B.\sin C}$$ = **3,252388144**

17.Tỉ số chu vi của tam giác ΔABC đối với đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Áp dụng định lí 17: $TC_O^{\Delta} = \frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\pi}$ = **0,498167168**

18.Tỉ số chu vi đường tròn nội tiếp của tam giác ΔABC đối với đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Áp dụng định lí 18: $TC_O^{I} = 2.\frac{\sin A.\sin B.\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}$ = **0,153169654**

Bài 4. Cho ΔABC có $A = 57^0 19'54"$, $C = 30^0 04'19,75"$ nội tiếp trong đường tròn (O; 11,31945cm). Tính tỉ số diện tích ΔABC và diện tích hình tròn nội tiếp ΔABC .

<u>Giải:</u>

Tỉ số diện tích tam giác ABC với hình tròn nội tiếp của tam giác đó.

Áp dụng định lí 6:

$$TS_I^{\Delta} = \frac{1}{2\pi}.\frac{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}{\sin A.\sin B.\sin C}$$ = **2,071396421**

Bài 5. Cho ΔABC có $A = 15^0 5'19,41"$, $B = 26^0 03'19,31"$ và có chu vi bằng 19,52012cm. Tính tỉ số diện tích hình tròn nội tiếp và hình tròn ngoại tiếp ΔABC.

<u>Giải:</u>

Áp dụng định lí 4:

$$TS_O^I = 4.\left(\frac{\sin A.\sin B.\sin C}{\sin A + \sin B + \sin C}\right)^2 = \mathbf{0,012284755}$$

Bài 6. Cho ΔABC có $A = 19^0 8'19,45"$, $B = 27^0 7'20,12"$ và có chu vi bằng 25,81911cm. Tính tỉ số diện tích giới hạn bởi các cạnh của tam giác ΔABC với đường tròn ngoại tiếp tam giác và diện tích giới hạn bởi các cạnh của tam giác ΔABC với đường tròn nội tiếp tam giác.

Giải:

Áp dụng định lí 8:

$^*TS_O^I = \dfrac{2t(x^2 - 2\pi t)}{x^2(\pi - 2t)}$ với t = sinA.sinB.sinC và x = sinA + sinB + sinC

Suy ra $^*TS_I^O = \dfrac{x^2(\pi - 2t)}{2t(x^2 - 2\pi t)}$ = **19,32549161**

Bài 7. Cho ΔPMN cân tại P, có $P = 30^0$ và MM = 6 cm. Kẻ phân giác MD, trung tuyến ME, đường cao MH. Tính:

1.Tỉ số diện tích phần giới hạn bởi MD, ME và PN đối với diện tích ΔPMN

2.Tỉ số diện tích hình tròn nội tiếp và hình tròn ngoại tiếp ΔPMN

3.Tỉ số đường cao MH với đường phân giác MD

4.Tỉ số đường cao MH với đường đường trung tuyến ME

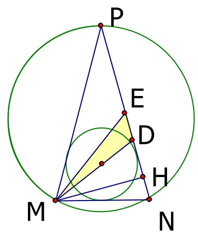
5.Tỉ số đường phân giác MD với đường trung tuyến ME

6.Tỉ số diện tích giới hạn bởi đường tròn nội tiếp và các cạnh của tam giác đối với diện tích được giới hạn bởi đường tròn ngoại tiếp và các cạnh của ΔPMN

7.Tỉ số chu vi của tam giác ΔPMN đối với đường tròn nội tiếp ΔPMN

8.Tỉ số chu vi của tam giác ΔPMN đối với đường tròn ngoại tiếp ΔPMN

9.Tỉ số chu vi đường tròn nội tiếp của tam giác ΔABC đối với đường tròn ngoại tiếp ΔPMN .

Giải: 

1.Tỉ số diện tích phần giới hạn bởi MD, ME và PN đối với diện tích ΔPMN

Áp dụng định lí 7: $TS_{MPN}^{M} = \frac{1}{2}.\left|\frac{\sin P - \sin N}{\sin P + \sin N}\right|$ = **0,158918622**

2. Tỉ số diện tích đường tròn nội tiếp và đường tròn

ngoại tiếp ΔPMN

Áp dụng định lí 4: $TS_{O}^{I} = 4.\left(\frac{\sin P.\sin M.\sin N}{\sin P + \sin M + \sin N}\right)^2$ = **0,147197676**

3. Tỉ số đường cao MH với đường phân giác MD:

Áp dụng định lí 9: $\frac{MH}{MD} = T_{f_m}^{h_m} = \frac{\sin P + \sin N}{2\cos\frac{M}{2}}$ = 0,923879532

4. Tỉ số đường cao MH với đường đường trung tuyến ME:

Áp dụng định lí 10:

$\frac{MH}{ME} = T_{m_m}^{h_m} = \frac{2\sin P.\sin N}{\sqrt{2\sin^2 P + 2\sin^2 N - \sin^2 M}}$ = 0,806898221

5. Tỉ số đường phân giác MD với đường trung tuyến ME:

Áp dụng định lí 11:

$\frac{MD}{ME} = T_{m_m}^{f_m} = \frac{\sin P.\sin N}{\sin P + \sin N}.\frac{4\cos\frac{M}{2}.}{\sqrt{2\sin^2 P + 2\sin^2 N - \sin^2 M}}$ = **0,873380341**

6. Tỉ số diện tích giới hạn bởi đường tròn nội tiếp và các cạnh của tam giác đối với diện tích được giới hạn bởi đường tròn ngoại tiếp và các cạnh của ΔPMN.

Áp dụng định lí 8:

$^{*}TS_{O}^{I} = \dfrac{2t(x^2 - 2\pi t)}{x^2(\pi - 2t)}$ với t = sinP.sinM.sinN và x = sinP + sinM + sinN

= **0,213067931**

7. Tỉ số chu vi của tam giác ΔPMN đối với đường tròn nội tiếp ΔPMN.

Áp dụng định lí 16:

$$TC_{I}^{\Delta} = \frac{1}{2\pi}.\frac{(\sin P + \sin M + \sin N)^2}{\sin P.\sin M.\sin N}$$ = **2,017607708**

8.Tỉ số chu vi của tam giác ΔPMN đối với đường tròn ngoại tiếp ΔPMN.

Áp dụng định lí 17: $TC_{O}^{\Delta} = \dfrac{\sin P + \sin M + \sin N}{\pi}$ = **0,774082422**

9.Tỉ số chu vi đường tròn nội tiếp của tam giác ΔPMN đối với đường tròn ngoại tiếp ΔPMN.

Áp dụng định lí 18: $TC_{O}^{I} = 2.\dfrac{\sin P.\sin M.\sin N}{\sin P + \sin M + \sin N}$ = **0,383663494**

Bài 8. Cho ΔDUY cân tại D, có $U = 50^0$. Kẻ phân giác DE, trung tuyến DM, đường cao DH. Tính:

1.Tỉ số diện tích phần giới hạn bởi DE, DM và UY đối với diện tích ΔDUY

2.Tỉ số diện tích hình tròn nội tiếp và hình tròn ngoại tiếp ΔDUY

3.Tỉ số đường cao DH với đường phân giác DE

4.Tỉ số đường cao DH với đường đường trung tuyến DM

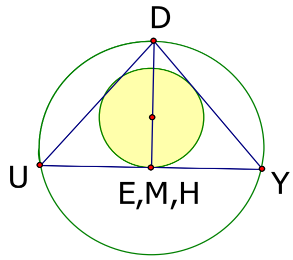
5.Tỉ số đường phân giác DE với đường trung tuyến DM

6.Tỉ số diện tích giới hạn bởi đường tròn nội tiếp và các cạnh của tam giác ΔDUY đối với diện tích được giới hạn bởi đường tròn ngoại tiếp và các cạnh của ΔDUY

7.Tỉ số chu vi của tam giác ΔDUY đối với đường tròn nội tiếp ΔDUY

8.Tỉ số chu vi của tam giác ΔDUY đối với đường tròn ngoại tiếp ΔDUY

9. Tỉ số chu vi đường tròn nội tiếp của tam giác ΔDUY đối với đường tròn ngoại tiếp ΔDUY .



Giải:

1. Tỉ số diện tích phần giới hạn bởi DE, DM và UY

đối với diện tích ΔDUY

Áp dụng định lí 7: $\frac{S_{DEM}}{S_{DUY}} = \frac{1}{2}.\left|\frac{\sin U - \sin Y}{\sin U + \sin Y}\right|$

Vì ΔDUY cân tại D nên sinU = Sin Y suy ra sinU - Sin Y= 0

Nên $\frac{S_{DEM}}{S_{DUY}} = \frac{1}{2}.\left|\frac{\sin U - \sin Y}{\sin U + \sin Y}\right| = 0$

2. Tỉ số diện tích hình tròn nội tiếp và hình tròn ngoại tiếp ΔDUY

Áp dụng định lí 4:

$$TS_O^I = 4.\left(\frac{\sin D.\sin U.\sin Y}{\sin D + \sin U + \sin Y}\right)^2 = \mathbf{0{,}210886128}$$

3. Tỉ số đường cao DH với đường phân giác DE.

Vì ΔDUY cân tại D nên DH = DE .Suy ra $\frac{DH}{DE} = 1$

4. Tỉ số đường cao DH với đường trung tuyến DM.

Vì ΔDUY cân tại D nên DH = DM .Suy ra $\frac{DH}{DM} = 1$

5. Tỉ số đường phân giác DE với đường trung tuyến DM.

Vì ΔDUY cân tại D nên DE = DM .Suy ra $\frac{DE}{DM} = 1$

6. Tỉ số diện tích giới hạn bởi đường tròn nội tiếp và các cạnh của tam giác ΔDUY đối với diện tích được giới hạn bởi đường tròn ngoại tiếp và các cạnh của ΔDUY

Áp dụng định lí 8:

$^{*}TS_O^I = \dfrac{2t(x^2 - 2\pi t)}{x^2(\pi - 2t)}$ với t = sinD.sinU.sinY và x = sinD + sinU + sinY

= **0,248416641**

7. Tỉ số chu vi của tam giác ΔDUY đối với đường tròn nội tiếp ΔDUY.

Áp dụng định lí 16:

$TC_I^{\Delta} = \dfrac{1}{2\pi}.\dfrac{(\sin D + \sin U + \sin Y)^2}{\sin D.\sin U.\sin Y}$ = **0,248416641**

8. Tỉ số chu vi của tam giác ΔDUY đối với đường tròn ngoại tiếp ΔDUY

Áp dụng định lí 17: $TC_O^{\Delta} = \dfrac{\sin D + \sin U + \sin Y}{\pi}$ = **0,801153082**

9.Tỉ số chu vi đường tròn nội tiếp của tam giác ΔDUY đối với đường tròn ngoại tiếp ΔDUY.

Áp dụng định lí 18: $TC_O^I = 2.\dfrac{\sin D.\sin U.\sin Y}{\sin D + \sin U + \sin Y}$ = **0,459223397**

Bài 9. Chứng minh rằng:

a) Nếu ΔABC có sinB + sinC = 2cos$\dfrac{A}{2}$ thì ΔABC cân tại A.

b) Nếu ΔABC cân tại A thì sinB + sinC = 2cos$\dfrac{A}{2}$

<u>Giải:</u>

a) Ta có: sinB + sinC = 2cos$\dfrac{A}{2}$ $\Leftrightarrow \dfrac{\sin B + \sin C}{\cos\dfrac{A}{2}} = 1$

Mà $T_{f_a}^{h_a} = \dfrac{\sin B + \sin C}{2\cos\dfrac{A}{2}}$ (theo định lí 9)

Suy ra $T_{f_a}^{h_a} = 1$ nên AH $\equiv$ AD.

Do đó ΔABC cân tại A (đpcm)

b) Ta có ΔABC cân tại A
Suy ra $h_a = f_a$ nên $\Rightarrow T_{f_a}^{h_a} = 1$

Mà $T_{f_a}^{h_a} = \dfrac{\sin B + \sin C}{2\cos\dfrac{A}{2}}$ (theo định lí 9)

$\Rightarrow \dfrac{\sin B + \sin C}{\cos\dfrac{A}{2}} = 1 \Rightarrow$ sinB + sinC = $2\cos\dfrac{A}{2}$ (đpcm)

Bài 10. Chứng minh rằng:

a) Nếu ΔABC có $\sqrt{2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A}$ = 2sinB.sinC thì ΔABC cân tại A.
b) Nếu ΔABC cân tại A thì $\sqrt{2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A}$ = 2sinB.sinC.
Giải:

a) Ta có $\sqrt{2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A}$ = 2sinB.sinC
$\Rightarrow \dfrac{2\sin B.\sin C}{\sqrt{2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A}} = 1$

Mà $T_{m_a}^{h_a} = \dfrac{2\sin B.\sin C}{\sqrt{2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A}}$ (theo định lí 10)

$\Rightarrow T_{m_a}^{h_a} = 1 \Rightarrow h_a = m_a \Rightarrow$ AH trùng với AM

Do đó ΔABC cân tại A (đpcm).

b) Ta có ΔABC cân tại A $\Rightarrow h_a = m_a \Rightarrow T_{m_a}^{h_a} = 1$
Mà $T_{m_a}^{h_a} = \dfrac{2\sin B.\sin C}{\sqrt{2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A}}$ (theo định lí 10)

$\Rightarrow \dfrac{2\sin B.\sin C}{\sqrt{2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A}} = 1$

Do đó $\sqrt{2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A}$ = 2sinB.sinC (đpcm).

Bài 11. Chứng minh rằng:

a) Nếu ΔABC cân tại A thì

$4\cos\frac{A}{2}$.sinB.sinC =(sinB + sinC)$\sqrt{2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A}$

b) Nếu ΔABC có $4\cos\frac{A}{2}$.sinB.sinC = (sinB +sinC)$\sqrt{2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A}$ thì ΔABC cân tại A.

<u>Giải:</u>

a) Ta có ΔABC cân tại A $\Rightarrow$ $f_a = m_a$ $\Rightarrow T_{m_a}^{f_a} = 1$

Mà $T_{m_a}^{f_a} = \frac{\sin B.\sin C}{\sin B + \sin C}.\frac{4\cos\frac{A}{2}.}{\sqrt{2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A}}$ (định lí 11)

$$\Rightarrow \frac{\sin B.\sin C}{\sin B + \sin C}.\frac{4\cos\frac{A}{2}.}{\sqrt{2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A}} = 1$$

$\Rightarrow 4\cos\frac{A}{2}.\sin B.\sin C = \sin B + \sin C.\sqrt{2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A}$ (đpcm).

b) Ta có $4\cos\frac{A}{2}.\sin B.\sin C = \sin B + \sin C.\sqrt{2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A}$

$$\Rightarrow \frac{\sin B.\sin C}{\sin B + \sin C}.\frac{4\cos\frac{A}{2}.}{\sqrt{2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A}} = 1$$

Mà $T_{m_a}^{f_a} = \frac{\sin B.\sin C}{\sin B + \sin C}.\frac{4\cos\frac{A}{2}.}{\sqrt{2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A}}$ (định lí 11)

$\Rightarrow T_{m_a}^{f_a} = 1 \Rightarrow f_a = m_a \Rightarrow$ AD trùng với AM

Do đó ΔABC cân tại A (đpcm).

Bài 12. Nhận dạng ΔABC nếu ΔABC có:

a) sinA + sinB + sinC = 4sinA.sinB.sinC.

b) R = $\frac{P}{\sin A + 2\sin B}$ (R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC, P là nửa chu vi ΔABC)

c) $S_{\Delta ABC} = 2R^2 \sin A.\sin^2 B$

d) $\begin{cases} \sin A + \sin B = 2\cos\dfrac{C}{2} \\ \sin B + \sin C = 2\cos\dfrac{A}{2} \end{cases}$

e) $\begin{cases} \sqrt{2\sin^2 A + 2\sin^2 B - \sin^2 C} = 2\sin A.\sin B \\ \sqrt{2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A} = 2\sin B.\sin C \end{cases}$

f) $TS_{ABC}^{A} = TS_{ABC}^{B} = 0$.

Giải:

a) Ta có sinA + sinB + sinC = 4sinA.sinB.sinC.

$\Leftrightarrow \dfrac{4.\sin A.\sin B.\sin C}{\sin A + \sin B + \sin C} = 1$

$\Leftrightarrow 16.\left(\dfrac{\sin A.\sin B.\sin C}{\sin A + \sin B + \sin C}\right)^2 = 1$

$\Leftrightarrow 16.\left(\dfrac{\sin A.\sin B.\sin C}{\sin A + \sin B + \sin C}\right)^2 = 1$

$\Leftrightarrow 4.\left(\dfrac{\sin A.\sin B.\sin C}{\sin A + \sin B + \sin C}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$

Theo định lí 4 ta có $TS_O^I = 4.\left(\dfrac{\sin A.\sin B.\sin C}{\sin A + \sin B + \sin C}\right)^2$

Suy ra $TS_O^I = \dfrac{1}{4}$ (mà theo hệ quả của định lí 4: Nếu $TS_O^I = \dfrac{1}{4}$ thì ΔABC đều)

Vậy: ΔABC có sinA + sinB + sinC = 4sinA.sinB.sinC thì ΔABC đều.

b) Theo định lí 1, ta có:

Trong ΔABC thì R = $\dfrac{P}{\sin A + \sin B + \sin C}$

Mà R = $\dfrac{P}{\sin A + 2\sin B}$ (gt)

Do đó $\dfrac{P}{\sin A + 2\sin B} = \dfrac{P}{\sin A + \sin B + \sin C}$

$\Leftrightarrow$ sinA + sinB + sinC = sinA + 2sinB

$\Leftrightarrow$ sinC = sinB

$\Leftrightarrow C = B$

$\Leftrightarrow \Delta$ABC cân tại A

Vậy: ΔABC có R = $\dfrac{P}{\sin A + 2\sin B}$ thì ΔABC cân tại A

c) Theo định lí 2, ta có:
Trong ΔABC thì $S_{\Delta ABC} = 2R^2 \sin A.\sin B.\sin C$

Mà $S_{\Delta ABC} = 2R^2 \sin A.\sin^2 B$ (gt)

Do đó sinC = sinB

$\Leftrightarrow C = B$

$\Leftrightarrow \Delta$ABC cân tại A

Vậy: ΔABC có $S_{\Delta ABC} = 2R^2 \sin A.\sin^2 B$ thì ΔABC cân tại A

d) Theo đề ta có : sinA + sinB = 2cos$\dfrac{C}{2}$ $\Leftrightarrow \dfrac{\sin A + \sin B}{\cos\dfrac{C}{2}} = 1$

Mà $T_{f_c}^{h_c} = \dfrac{\sin A + \sin B}{2\cos\dfrac{C}{2}}$ (theo định lí 9)

Suy ra $T_{f_c}^{h_c} = 1$ nên $h_c = f_c$

Do đó ΔABC cân tại C (1)

Ta lại có: sinB + sinC = 2cos$\dfrac{A}{2}$ $\Leftrightarrow \dfrac{\sin B + \sin C}{\cos\dfrac{A}{2}} = 1$

Mà $T_{f_a}^{h_a} = \dfrac{\sin B + \sin C}{2\cos\dfrac{A}{2}}$ (theo định lí 9)

Suy ra $T_{f_a}^{h_a} = 1$ nên $h_a = f_a$

Do đó ΔABC cân tại A (2)

Từ (1) và (2) suy ra ΔABC là tam giác đều.

Vậy: ΔABC có $\begin{cases} \sin A + \sin B = 2\cos\dfrac{C}{2} \\ \sin B + \sin C = 2\cos\dfrac{A}{2} \end{cases}$ là tam giác đều.

e) + Theo đề ta có $\sqrt{2\sin^2 A + 2\sin^2 B - \sin^2 C} = 2\sin A.\sin B$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin A.\sin B}{\sqrt{2\sin^2 A + 2\sin^2 B - \sin^2 C}} = 1$$

Mà theo định lí 10: $T_{m_c}^{h_c} = \dfrac{2\sin A.\sin B}{\sqrt{2\sin^2 A + 2\sin^2 B - \sin^2 C}}$

$$\Rightarrow T_{m_c}^{h_c} = 1 \Rightarrow h_c = m_c$$

Do đó ΔABC cân tại C (3).

+ Theo đề ta có $\sqrt{2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A} = 2\sin B.\sin C$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin B.\sin C}{\sqrt{2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A}} = 1$$

Mà theo định lí 10: $T_{m_a}^{h_a} = \dfrac{2\sin B.\sin C}{\sqrt{2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A}}$

$$\Rightarrow T_{m_a}^{h_a} = 1 \Rightarrow h_a = m_a$$

Do đó ΔABC cân tại A (4).

Từ (3) và (4) suy ra ΔABC là tam giác đều.

f) + Theo định lí 7 ta có: $TS_{ABC}^{A} = \dfrac{1}{2}.\left|\dfrac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C}\right|$

Mà $TS_{ABC}^{A} = 0$ (gt)

$$\Rightarrow \frac{1}{2}.\left|\frac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C}\right| = 0$$

$\Rightarrow$sin B = sinC $\Rightarrow B = C$ (5)

+ Theo định lí 7 ta có: $TS_{ABC}^{B} = \frac{1}{2}.\left|\frac{\sin C - \sin A}{\sin C + \sin A}\right|$

Mà TS_{ABC}^{B} = 0 (gt)

$\Rightarrow \frac{1}{2}.\left|\frac{\sin C - \sin A}{\sin C + \sin A}\right| = 0$

$\Rightarrow$sin C = sinA $\Rightarrow C = A$ (6)

Từ (5) và (6) suy ra ΔABC là tam giác đều.

Bài 13. Cho ΔABC cân tại A. Chứng minh rằng:

a) $S_{\Delta ABC} = 2P^2 \frac{\sin A.\sin^2 B}{(\sin A + 2\sin B)^2}$

b) $S_{\Delta ABC} = 2R^2 \sin A.\sin^2 B$

c) $S_{\Delta ABC} = \frac{r^2}{2}.\frac{(\sin A + 2\sin B)^2}{\sin A.\sin^2 B}$

d) $TS_O^I = 4.\left(\frac{\sin A.\sin^2 B}{\sin A + 2\sin B}\right)^2$

e) $TS_O^\Delta = \frac{2}{\pi}.\sin A.\sin^2 B$

f) $TS_I^\Delta = \frac{1}{2\pi}.\frac{\left(\sin A + 2\sin B\right)^2}{\sin A.\sin^2 B}$

g) TS_{ABC}^{A} = 0

<u>**Giải:**</u> Ta có ΔABC cân tại A $\Rightarrow B = C \Rightarrow$ sin B = sinC

a) Theo định lí 1:

$S_{\Delta ABC} = 2P^2 \frac{\sin A.\sin B.\sin C}{(\sin A + \sin B + \sin C)^2}$. Thay sin C = sinB

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = 2P^2 \frac{\sin A.\sin^2 B}{(\sin A + 2\sin B)^2}$ (đpcm)

b) Theo định lí 2:

$S_{\Delta ABC} = 2R^2 \sin A.\sin .B\sin C$. Thay sin C = sinB

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = 2R^2 \sin A.\sin^2 B \text{ (đpcm).}$$

c) Theo định lí 3:

$S_{\Delta ABC} = \frac{r^2}{2}.\frac{(\sin A + \sin B + \sin C)^2}{\sin A.\sin B.\sin C}$. Thay sin C = sinB

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{r^2}{2}.\frac{(\sin A + 2\sin B)^2}{\sin A.\sin^2 B} \text{ (đpcm).}$$

d) Áp dụng định lí 4:

$TS_O^I = 4.\left(\frac{\sin A.\sin B.\sin C}{\sin A + \sin B + \sin C}\right)^2$. Thay sin C = sinB

$$\Rightarrow TS_O^I = 4.\left(\frac{\sin A.\sin^2 B}{\sin A + 2\sin B}\right)^2 \text{ (đpcm)}$$

e) Áp dụng định lí 5:

$TS_O^\Delta = \frac{2}{\pi}.\sin A.\sin B.\sin C$. Thay sin C = sinB

$\Rightarrow TS_O^\Delta = \frac{2}{\pi}.\sin A.\sin^2 B$ (đpcm)

f) Áp dụng định lí 6:

$TS_I^\Delta = \frac{1}{2\pi}.\frac{(\sin A + \sin B + \sin C)^2}{\sin A.\sin B.\sin C}$. Thay sin C = sinB

$$\Rightarrow TS_I^\Delta = \frac{1}{2\pi}.\frac{(\sin A + 2\sin B)^2}{\sin A.\sin^2 B} \text{ (đpcm)}$$

g) Áp dụng định lí 7: $TS_{ABC}^A = \frac{1}{2}.\left|\frac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C}\right|$. Thay sin C = sinB

$\Rightarrow TS_{ABC}^A = 0$ (vì sinB + sinC $\neq 0$) (đpcm)

Bài 14. Cho tam giác đều ABC. CMR:

a) $S_{\Delta ABC} = \frac{P^2}{3\sqrt{3}}$

b) $S_{\Delta ABC} = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$

c) $S_{\Delta ABC} = 3\sqrt{3}r^2$

d) $TS_O^I = \dfrac{1}{4}$

e) $TS_O^\Delta = \dfrac{3\sqrt{3}}{4\pi}$

f) $TS_I^\Delta = \dfrac{3\sqrt{3}}{\pi}$

g) $^*TS_O^I = \dfrac{\sqrt{27}-\pi}{4\pi-\sqrt{27}}$

<u>Giải:</u> Ta có ΔABC đều $\Rightarrow A = B = C = 60^0$

$\Rightarrow$sinA = sin B = sinC = sin60^0 = $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (*)

a) Theo định lí 1: $S_{\Delta ABC} = 2P^2\dfrac{\sin A.\sin B.\sin C}{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}$ (1)

Từ (*) và (1) suy ra :

$$S_{\Delta ABC} = 2P^2.\frac{\sin^3 60^0}{9\sin^2 60^0}$$

$$= 2P^2.\frac{\sin 60^0}{9} = 2P^2.\frac{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}{9} = \frac{P^2}{3\sqrt{3}} \text{(đpcm)}$$

b) Theo định lí 2: $S_{\Delta ABC} = 2R^2\sin A.\sin .B\sin C$ (2)

Từ (*) và (2) suy ra : $S_{\Delta ABC} = 2R^2\sin^3 60^0 = 2R^2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \dfrac{3\sqrt{3}R^2}{4}$ (đpcm)

c) Theo định lí 3: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{r^2}{2}.\dfrac{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}{\sin A.\sin B.\sin C}$ (3)

Từ (*) và (3) suy ra: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{r^2}{2}.\dfrac{(3\sin 60^0)^2}{\sin^3 60^0} = \dfrac{9r^2}{2.\sin 60^0} = \dfrac{9r^2}{2.\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = 3\sqrt{3}r^2$

d) Theo định lí 4: $TS_O^I = 4.\left(\dfrac{\sin A.\sin B.\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}\right)^2$ (4)

Từ (*) và (4) suy ra: $TS_O^I = 4.\left(\dfrac{\sin^3 60^0}{3\sin 60^0}\right)^2 = 4.\dfrac{\sin^4 60^0}{9} = 4.\dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^4}{9} = \dfrac{1}{4}$ (đpcm)

e) Theo định lí 5: $TS_O^\Delta = \dfrac{2}{\pi}.\sin A.\sin B.\sin C$ (5)

Từ (*) và (5) suy ra: $TS_O^\Delta = \dfrac{2}{\pi}.\sin^3 60^0 = \dfrac{2}{\pi}.\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \dfrac{3\sqrt{3}}{4\pi}$ (đpcm)

f) Theo định lí 6: $TS_I^\Delta = \dfrac{1}{2\pi}.\dfrac{\left(\sin A+\sin B+\sin C\right)^2}{\sin A.\sin B.\sin C}$ (6)

Từ (*) và (6) suy ra: $TS_I^\Delta = \dfrac{1}{2\pi}.\dfrac{9\sin^2 60^0}{\sin^3 60^0} = \dfrac{9}{2\pi\sin 60^0} = \dfrac{9}{2\pi\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\pi}$

g) Theo định lí 8:

$^*TS_O^I = \dfrac{2t(x^2-2\pi t)}{x^2(\pi-2t)}$ với t = sinA.sinB.sinC= $\sin^3 60^0 = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

và x = sinA + sinB + sinC=3sin60$^0 = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x^2 = \dfrac{27}{4}$

Suy ra $^*TS_O^I = \dfrac{2t(x^2-2\pi t)}{x^2(\pi-2t)} = \dfrac{2.\dfrac{3\sqrt{3}}{8}\left(\dfrac{27}{4}-2\pi\dfrac{3\sqrt{3}}{8}\right)}{\dfrac{27}{4}\left(\pi-2\dfrac{3\sqrt{3}}{8}\right)} = \dfrac{\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\left(\dfrac{27}{4}-\pi\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)}{\dfrac{27}{4}\left(\pi-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)}$

$$= \dfrac{\dfrac{81\sqrt{3}-27\pi}{16}}{\dfrac{108\pi-81\sqrt{3}}{16}} = \dfrac{81\sqrt{3}-27\pi}{108\pi-81\sqrt{3}} = \dfrac{27\left(3\sqrt{3}-\pi\right)}{27\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)} = \dfrac{\sqrt{27}-\pi}{4\pi-\sqrt{27}} \text{ (đpcm)}$$

Bài 15. Cho ΔABC vuông cân tại A. Chứng minh rằng:

a) $S_{\Delta ABC} = \dfrac{P^2}{(1+\sqrt{2})^2}$

b) $S_{\Delta ABC} = R^2$

c) $S_{\Delta ABC} = r^2(1+\sqrt{2})^2$

d) $TS_O^I = \dfrac{1}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}$

e) $TS_O^\Delta = \dfrac{1}{\pi}$

f) $TS_I^\Delta = \dfrac{(1+\sqrt{2})^2}{\pi}$

<u>Giải:</u> Giả sử ta có ΔABC vuông cân tại A $\Rightarrow A = 90^0, B = C = 45^0$

$\Rightarrow$ sinA = 1, sin B = sinC= $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (*)

a) Theo định lí 1: $S_{\Delta ABC} = 2P^2 \dfrac{\sin A.\sin B.\sin C}{(\sin A + \sin B + \sin C)^2}$ (1)

Từ (*) và (1) $\Rightarrow S_{\Delta ABC} = 2P^2 \dfrac{\sin A.\sin^2 B}{(\sin A + 2\sin B)^2}$

$$= 2P^2.\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{\left(1+2\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{P^2}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2} \text{ (đpcm)}$$

b) Theo định lí 2: $S_{\Delta ABC} = 2R^2 \sin A.\sin .B \sin C$ (2)

Từ (*) và (2)$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = 2R^2.1.\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = R^2$ (đpcm).

c) Theo định lí 3: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{r^2}{2}.\dfrac{(\sin A + \sin B + \sin C)^2}{\sin A.\sin B.\sin C}$ (3)

Từ (*) và (3)$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{r^2}{2}.\dfrac{(1+2\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{1.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = r^2\left(1+\sqrt{2}\right)^2$ (đpcm).

d) Áp dụng định lí 4: $TS_O^I = 4.\left(\dfrac{\sin A.\sin B.\sin C}{\sin A + \sin B + \sin C}\right)^2$ (4)

Từ (*) và (4) $\Rightarrow TS_O^I = 4.\left(\dfrac{1.\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{1+2.\dfrac{\sqrt{2}}{2}}\right)^2 = \dfrac{1}{(1+\sqrt{2})^2}$ (đpcm)

e) Áp dụng định lí 5: $TS_O^{\Delta} = \dfrac{2}{\pi}.\sin A.\sin B.\sin C$ (5)

Từ (*) và (5) $\Rightarrow TS_O^{\Delta} = \dfrac{2}{\pi}.1.\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{\pi}$ (đpcm)

f) Áp dụng định lí 6: $TS_I^{\Delta} = \dfrac{1}{2\pi}.\dfrac{\left(\sin A+\sin B+\sin C\right)^2}{\sin A.\sin B.\sin C}$ (6)

Từ (*) và (6) $\Rightarrow TS_I^{\Delta} = \dfrac{1}{2\pi}.\dfrac{\left(1+2\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{1.\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}{\pi}$ (đpcm)

Bài 16. Cho ΔABC cân tại A. Chứng minh rằng:

a) $h_a = 2P.\dfrac{\sin^2 B}{\sin A+2\sin B}$; *($h_a$: là các chiều cao tương ứng kẻ từ A)*

b) $m_a = \dfrac{P}{\sin A+2\sin B}.\sqrt{4\sin^2 B-\sin^2 A}$

(m_a: Độ dài các đường trung tuyến kẻ từ A)

c) $f_a = P.\dfrac{2\cos\dfrac{A}{2}.\sin B}{\sin A+2\sin B}$; *($f_a$: Độ dài các đường phân giác trong kẻ từ A)*

d) Bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC là $R = \dfrac{P}{\sin A+2\sin B}$

e) Bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC là $r = 2P.\dfrac{\sin A.\sin^2 B.}{(\sin A+2\sin B)^2}$

f) $S_B = S_C$

(S_B, S_C lần lượt là diện tích tam giác tạo bởi đường trung tuyến, đường phân giác của đỉnh B, C với cạnh AC, AB)

Giải: Ta có ΔABC cân tại A $\Rightarrow B = C \Rightarrow$ sin B = sinC (*)

a) Theo định lí 1: $h_a = 2P.\dfrac{\sin B.\sin C}{\sin A + \sin B + \sin C}$ (1)

Từ (*) và (1) suy ra: $h_a = 2P.\dfrac{\sin^2 B}{\sin A + 2\sin B}$ (đpcm)

b) Theo định lí 1:

$m_a = \dfrac{P}{\sin A + \sin B + \sin C}.\sqrt{2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A}$ (2)

Từ (*) và (2) suy ra: $m_a = \dfrac{P}{\sin A + 2\sin B}.\sqrt{4\sin^2 B - \sin^2 A}$ (đpcm)

c) + Theo định lí 1: $h_a = 2P.\dfrac{\sin B.\sin C}{\sin A + \sin B + \sin C}$ (1)

+ Theo định lí 9: $T_{f_a}^{h_a} = \dfrac{\sin B + \sin C}{2\cos\frac{A}{2}} \Rightarrow f_a = \dfrac{h_a 2\cos\frac{A}{2}}{\sin B + \sin C}$

Suy ra $f_a = \dfrac{2P.\dfrac{\sin B.\sin C}{\sin A + \sin B + \sin C}.2\cos\dfrac{A}{2}}{\sin B + \sin C}$

$$= \frac{2P\sin^2 B.2\cos\frac{A}{2}}{2\sin B(\sin A + 2\sin B)}$$

$$= \frac{2P\sin^2 B.2\cos\frac{A}{2}}{2\sin B(\sin A + 2\sin B)} = \frac{2\cos\frac{A}{2}.\sin B}{\sin A + 2\sin B}$$ (đpcm)

d) Theo định lí 1: $R = \dfrac{P}{\sin A + \sin B + \sin C}$ (3)

Từ (*) và (3) suy ra $R = \dfrac{P}{\sin A + 2\sin B}$ (đpcm)

e) Theo định lí 1: $r = 2P.\dfrac{\sin A.\sin B.\sin C}{(\sin A + \sin B + \sin C)^2}$ (4)

Từ (*) và (4) suy ra : $r = 2P.\dfrac{\sin A.\sin^2 B}{(\sin A + 2\sin B)^2}$ (đpcm)

f) Theo định lí 1: ΔABC có:

$$S_B = \left| P^2.\frac{\sin A - \sin C}{\sin A + \sin C}.\frac{\sin A.\sin B.\sin C}{(\sin A + \sin B + \sin C)^2} \right|$$

$$S_C = \left| P^2.\frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B}.\frac{\sin A.\sin B.\sin C}{(\sin A + \sin B + \sin C)^2} \right|$$

Vì sinB = sin C suy ra $S_B = S_C$

Bài 17. Cho ΔABC cân tại A. Chứng minh rằng:

a) $h_a = 2R.\sin^2 B$ *(h_a là chiều cao kẻ từ A)*

b) $m_a = R\sqrt{4\sin^2 B - \sin^2 A}$ *(m_a : Độ dài đường trung tuyến kẻ từ A)*

c) $f_a = 2R\cos\frac{A}{2}\sin B$ *(f_a : Độ dài đường phân giác trong kẻ từ A)*

<u>**Giải:**</u> Ta có ΔABC cân tại A $\Rightarrow B = C \Rightarrow$ sin B = sinC (*)

a) Theo định lí 2: ΔABC, h_a = 2R.sinB.sinC (1)
Từ (*) và (1) suy ra : $h_a = 2R.\sin^2 B$ (đpcm)

b) Theo định lí 1: ΔABC
$m_a = R\sqrt{2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A}$ (2)

Từ (*) và (1) suy ra: $m_a = R\sqrt{4\sin^2 B - \sin^2 A}$ (đpcm)

c) + Theo định lí 9: $T_{f_a}^{h_a} = \dfrac{\sin B + \sin C}{2\cos\frac{A}{2}} \Rightarrow f_a = \dfrac{h_a 2\cos\frac{A}{2}}{\sin B + \sin C}$ (3)
+ Theo câu a : $h_a = 2R.\sin^2 B$

Do đó $f_a = \dfrac{2R.\sin^2 B.2\cos\frac{A}{2}}{\sin B + \sin C}$ mà sinB = sinC nên

$$f_a = \frac{2R.\sin^2 B.2\cos\frac{A}{2}}{2\sin B} = 2R.\cos\frac{A}{2}.\sin B \text{ (đpcm)}$$

Bài 18. Cho ΔABC cân tại A. Chứng minh rằng:

a) $h_a = \dfrac{r}{\sin A}.(\sin A + 2\sin B)$ *(h_a : là chiều cao kẻ từ A)*

b) $m_a = \frac{r}{2}.\frac{\sin A + 2\sin B}{\sin A.\sin^2 B}\sqrt{4\sin^2 B - \sin^2 A}$

(m_a : Độ dài đường trung tuyến kẻ từ A)

c) $f_a = \frac{r(\sin A + 2\sin B)}{2\sin\frac{A}{2}\sin B}$. *($f_a$: Độ dài đường phân giác trong kẻ từ A)*

<u>Giải:</u> Ta có ΔABC cân tại A $\Rightarrow B = C \Rightarrow$ sin B = sinC (*)

a) Theo định lí 3: ΔABC có : $h_a = \frac{r}{\sin A}.(\sin A + \sin B + \sin C)$ (1)

Từ (*) và (1) suy ra : $h_a = \frac{r}{\sin A}.(\sin A + 2\sin B)$ (đpcm)

b) Theo định lí 3: ΔABC có :

$m_a = \frac{r}{2}.\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A.\sin B.\sin C}\sqrt{2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A}$ (2)

Từ (*) và (2) suy ra : $m_a = \frac{r}{2}.\frac{\sin A + 2\sin B}{\sin A.\sin^2 B}\sqrt{4\sin^2 B - \sin^2 A}$ (đpcm)

c) Theo định lí 3: ΔABC có :

$f_a = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}(\sin B + \sin C)}.(\sin A + \sin B + \sin C)$ (3)

Từ (*) và (3) suy ra : $f_a = \frac{r(\sin A + 2\sin B)}{2\sin\frac{A}{2}\sin B}$.(đpcm)

Bài 19. Cho ΔABC vuông cân tại A. Chứng minh rằng:

a) $h_a = m_a = f_a = \frac{P}{1+\sqrt{2}}$

b) $h_b = h_c = \frac{P\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

c) $m_b = m_c = \frac{P\sqrt{5}}{2+\sqrt{2}}$

d) $f_b = f_c = \frac{P\sqrt{2}}{\sin\frac{45^0}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)^2}$

<u>Giải:</u> Giả sử ta có ΔABC vuông cân tại A

$\Rightarrow A = 90^0, B = C = 45^0$ $\Rightarrow$ sinA = 1, sin B = sinC= $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (*)

a) Áp dụng định lí 1: $h_a = 2P.\frac{\sin B.\sin C}{\sin A + \sin B + \sin C}$ (1)

Từ (*) và (1) suy ra:

$$h_a = 2P.\frac{\sin^2 B}{\sin A + 2\sin B} = 2P.\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{1 + 2.\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{P}{1+\sqrt{2}};$$

Vì ΔABC vuông cân tại A nên $h_a = m_a = f_a = \frac{P}{1+\sqrt{2}}$

b) Áp dụng định lí 1: $h_b = 2P.\frac{\sin A.\sin C}{\sin A + \sin B + \sin C}$ (2)

Từ (*) và (2) suy ra: $h_b = 2P.\frac{1.\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + 2\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{P\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ (đpcm)

Vì ΔABC cân tại A nên $h_b = h_c = \frac{P\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

c) Áp dụng định lí 1:

$m_b = \frac{P}{\sin A + \sin B + \sin C}.\sqrt{2\sin^2 A + 2\sin^2 C - \sin^2 B}$ (3)

Từ (*) và (3) suy ra:

$$m_a = \frac{P}{\sin A + 2\sin B}.\sqrt{2\sin^2 A + \sin^2 B}$$

$$= \frac{P}{1 + 2\frac{\sqrt{2}}{2}}.\sqrt{2.1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{P}{1+\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{P\sqrt{5}}{2+\sqrt{2}}$$

Vì ΔABC cân tại A nên $m_b = m_c = \frac{P\sqrt{5}}{2+\sqrt{2}}$

d) Áp dụng định lí 1:

$f_b = \dfrac{2P}{\sin\dfrac{B}{2}(\sin A+\sin C)}.\dfrac{\sin A.\sin B.\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}$ (4)

Từ (*) và (3) suy ra:

$$f_b = \frac{2P}{\sin\frac{45^0}{2}(1+\frac{\sqrt{2}}{2})}.\frac{1.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{1+2\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{P\sqrt{2}}{\sin\frac{45^0}{2}.\left(1+\sqrt{2}\right)^2}$$

Vì ΔABC cân tại A nên $f_b = f_c = \dfrac{P\sqrt{2}}{\sin\frac{45^0}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)^2}$

Bài 20. Cho ΔABC vuông cân tại A. Chứng minh rằng:

a) $h_a = m_a = f_a = R$
b) $h_b = h_c = R\sqrt{2}$
c) $m_b = m_c = \dfrac{R\sqrt{10}}{2}$
d) $f_b = f_c = \dfrac{R\sqrt{2}}{\sin\frac{45^0}{2}(1+\sqrt{2})}$

<u>Giải:</u> Giả sử ta có ΔABC vuông cân tại A

$\Rightarrow A = 90^0, B = C = 45^0 \Rightarrow$ sinA = 1, sin B = sinC= $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (*)

a) Áp dụng định lí 2: h_a = 2R.sinB.sinC (1)

Từ (*) và (1) $\Rightarrow$ $h_a = 2R.\sin^2 45^0 = 2R\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = R$

Vì ΔABC vuông cân tại A nên $h_a = m_a = f_a = R$

b) Áp dụng định lí 2: h_b = 2R.sinA.sinC (2)

Từ (*) và (2) $\Rightarrow$ $h_b = 2R.1.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = R\sqrt{2}$

Vì ΔABC cân tại A nên $h_b = h_c = R\sqrt{2}$ (đpcm)

c) Áp dụng định lí 2: $m_b = R\sqrt{2\sin^2 A + 2\sin^2 C - \sin^2 B}$ (3)

Từ (*) và (3) $\Rightarrow$

m_b = R$\sqrt{2\sin^2 A + 2\sin^2 C - \sin^2 B} = R.\sqrt{2\sin^2 A + \sin^2 B}$

$$= R.\sqrt{2.1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{R\sqrt{10}}{2}$$

Vì ΔABC cân tại A nên $m_b = m_c = \frac{R\sqrt{10}}{2}$

d) Áp dụng định lí 2:

$f_b = \frac{2R}{\sin\frac{B}{2}(\sin A + \sin C)}.\sin A.\sin B.\sin C$ (4)

Từ (*) và (3) $\Rightarrow$ $f_b = \frac{2R}{\sin\frac{45^0}{2}(1+\frac{\sqrt{2}}{2})}.1.\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$= \frac{2R}{\sin\frac{45^0}{2}(2+\sqrt{2})} = \frac{R\sqrt{2}}{\sin\frac{45^0}{2}(1+\sqrt{2})}$$

Vì ΔABC cân tại A nên $f_b = f_c = \frac{R\sqrt{2}}{\sin\frac{45^0}{2}(1+\sqrt{2})}$ (đpcm)

Bài 21. Cho ΔABC vuông cân tại A. Chứng minh rằng:

a) $h_a = m_a = f_a = r(1+\sqrt{2})$

b) $h_b = h_c = r\ (2+\sqrt{2})$

c) $m_b = m_c = \frac{r}{2}.(\sqrt{10}+\sqrt{20})$

d) $f_b = f_c = \frac{r\sqrt{2}}{\sin\frac{45^0}{2}}$

<u>Giải:</u> Giả sử ta có ΔABC vuông cân tại A

$\Rightarrow A = 90^0, B = C = 45^0 \Rightarrow$ sinA = 1, sin B = sinC= $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (*)

a) Áp dụng định lí 3:

$h_a = \frac{r}{\sin A}.(\sin A + \sin B + \sin C)$ (1)

Từ (*) và (1) $\Rightarrow$ $h_a = \frac{r}{1}.\left(1+2.\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = r(1+\sqrt{2})$

Vì ΔABC vuông cân tại A nên $h_a = m_a = f_a = r(1+\sqrt{2})$ (đpcm)

b) Áp dụng định lí 3:

$h_b = \frac{r}{\sin B}.(\sin A + \sin B + \sin C)$ (2)

Từ (*) và (2) $\Rightarrow$ $h_b = \frac{r}{\sin B}.(\sin A + \sin B + \sin C)$

$$= \frac{r}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(1+2.\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= r\sqrt{2}(1+\sqrt{2}) = r.(2+\sqrt{2})$$

Vì ΔABC cân tại A nên $h_b = h_c = r\,(2+\sqrt{2})$ (đpcm)

c) Áp dụng định lí 3:

$m_b = \frac{r}{2}.\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A.\sin B.\sin C}\sqrt{2\sin^2 A + 2\sin^2 C - \sin^2 B}$ (3)

Từ (*) và (3) $\Rightarrow$ $m_b = \frac{r}{2}.\frac{1+\sqrt{2}}{1.\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{2.1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$

$$= r(1+\sqrt{2})\frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{r}{2}.(\sqrt{10}+\sqrt{20})$$

Vì ΔABC cân tại A nên $m_b = m_c = \frac{r}{2}.(\sqrt{10}+\sqrt{20})$ (đpcm)

d) Áp dụng định lí 3:

$f_b = \frac{r}{\sin\frac{B}{2}(\sin A + \sin C)}.(\sin A + \sin B + \sin C)$ (4)

Từ (*) và (4) $\Rightarrow$ f_b = $\dfrac{r}{\sin\dfrac{B}{2}(\sin A+\sin C)}.(\sin A+\sin B+\sin C)$

$$=\frac{r}{\sin\frac{45^0}{2}(1+\frac{\sqrt{2}}{2})}.\left(1+2.\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{r\sqrt{2}}{\sin\frac{45^0}{2}}$$

Vì ΔABC cân tại A nên $f_b = f_c$ = $\dfrac{r\sqrt{2}}{\sin\dfrac{45^0}{2}}$ (đpcm)

Bài 22. Cho tam giác đều. CMR:

a) h = $\dfrac{P}{\sqrt{3}}$

b) h = $\dfrac{3}{2}$R

c) h = 3r

(h, P, R, r: lần lượt là chiều cao của tam giác, nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp, bán kính đường tròn nội tiếp tam giác)

Giải: Ta có ΔABC đều $\Rightarrow A=B=C=60^0$

$$\Rightarrow \sin A = \sin B = \sin C = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\ (*)$$

a) Theo định lí 1, ΔABC có :
h_a = $2P.\dfrac{\sin B.\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}$ (1)

Từ (*) và (1) $\Rightarrow$ h_a = $2P.\dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{3.\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{3P}{2}.\dfrac{\dfrac{3}{4}}{3.\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{P}{\sqrt{3}}$ (đpcm)

b) Theo định lí 2, ΔABC có :
h_a = 2R.sinB.sinC (2)

Từ (*) và (2) $\Rightarrow$ h_a = 2R.sinB.sinC = 2R $\sin^2 60^0$ = $2R\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{2}R$ (đpcm)

c) Theo định lí 3, ΔABC có :

$h_a = \dfrac{r}{\sin A}.(\sin A + \sin B + \sin C)$ (3)

Từ (*) và (3) $\Rightarrow$ $h_a = \dfrac{r}{\sin 60^0}.3\sin 60^0 = 3r$ (đpcm)

Bài 23. Cho ΔABC cân tại A. Chứng minh rằng:

a) $TC_I^{\Delta} = \dfrac{1}{2\pi}.\dfrac{(\sin A + 2\sin B)^2}{\sin A.\sin^2 B}$

b) $TC_O^{\Delta} = \dfrac{\sin A + 2\sin B}{\pi}$

c) $TC_O^{I} = 2.\dfrac{\sin A.\sin^2 B}{\sin A + 2\sin B}$

<u>**Giải:**</u> Ta có ΔABC cân tại A $\Rightarrow B = C \Rightarrow$ sin B = sinC (*)

a) Theo định lí 16, ΔABC có : $TC_I^{\Delta} = \dfrac{1}{2\pi}.\dfrac{(\sin A + \sin B + \sin C)^2}{\sin A.\sin B.\sin C}$ (1)

Từ (*) và (1) $\Rightarrow TC_I^{\Delta} = \dfrac{1}{2\pi}.\dfrac{(\sin A + 2\sin B)^2}{\sin A.\sin^2 B}$ (đpcm)

b) Theo định lí 17, ΔABC có : $TC_O^{\Delta} = \dfrac{\sin A + \sin B + \sin C}{\pi}$ (2)

Từ (*) và (2) $\Rightarrow TC_O^{\Delta} = \dfrac{\sin A + 2\sin B}{\pi}$ (đpcm)

c) Theo định lí 18, ΔABC có : $TC_O^{I} = 2.\dfrac{\sin A.\sin B.\sin C}{\sin A + \sin B + \sin C}$ (3)

Từ (*) và (3) $\Rightarrow TC_O^{I} = 2.\dfrac{\sin A.\sin^2 B}{\sin A + 2\sin B}$ (đpcm)

Bài 24. Cho tam giác đều. Chứng minh rằng:

a) $TC_I^{\Delta} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\pi}$

b) $TC_O^{\Delta} = \dfrac{\sqrt{27}}{2\pi}$

c) $TC_O^I = \dfrac{1}{2}$

Giải: Ta có ΔABC đều $\Rightarrow A = B = C = 60^0$

$\Rightarrow$sinA = sin B = sinC = sin60^0 = $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (*)

a) Theo định lí 16, ΔABC có : $TC_I^\Delta = \dfrac{1}{2\pi}.\dfrac{(\sin A + \sin B + \sin C)^2}{\sin A.\sin B.\sin C}$ (1)

Từ (*) và (1) $\Rightarrow TC_I^\Delta = \dfrac{1}{2\pi}.\dfrac{(3\sin 60^0)^2}{(\sin 60^0)^3} = \dfrac{9}{2\pi\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\pi}$ (đpcm)

b) Theo định lí 17, ΔABC có : $TC_O^\Delta = \dfrac{\sin A + \sin B + \sin C}{\pi}$ (2)

Từ (*) và (2) $\Rightarrow TC_O^\Delta = \dfrac{3\sin 60^0}{\pi} = \dfrac{3\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\pi} = \dfrac{\sqrt{27}}{2\pi}$ (đpcm)

c) Theo định lí 18, ΔABC có : $TC_O^I = 2.\dfrac{\sin A.\sin B.\sin C}{\sin A + \sin B + \sin C}$ (3)

Từ (*) và (3) $\Rightarrow TC_O^I = 2.\dfrac{\sin^3 60^0}{3\sin 60^0} = 2.\dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{3} = \dfrac{1}{2}$ (đpcm)

Bài 25. Cho tam giác vuông cân . Chứng minh rằng:

a) $TC_I^\Delta = \dfrac{(1+\sqrt{2})^2}{\pi}$

b) $TC_O^\Delta = \dfrac{1+\sqrt{2}}{\pi}$

c) $TC_O^I = \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$

Giải: Giả sử ta có ΔABC vuông cân tại A

$\Rightarrow A = 90^0, B = C = 45^0 \Rightarrow$ sinA = 1, sin B = sinC= $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (*)

a) Theo định lí 16, ΔABC có : $TC_I^{\Delta} = \frac{1}{2\pi}.\frac{\left(\sin A + \sin B + \sin C\right)^2}{\sin A.\sin B.\sin C}$ (1)

Từ (*) và (1) $\Rightarrow TC_I^{\Delta} = \frac{1}{2\pi}.\frac{\left(1 + 2\sin 45^0\right)^2}{\sin^2 45^0}$

$$= \frac{1}{2\pi}.\frac{\left(1 + 2\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}} = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}{\pi}$$ (đpcm)

b) Theo định lí 17, ΔABC có : $TC_O^{\Delta} = \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\pi}$ (2)

Từ (*) và (2) $\Rightarrow TC_O^{\Delta} = \frac{1 + 2\sin 45^0}{\pi} = \frac{1+\sqrt{2}}{\pi}$ (đpcm)

c) Theo định lí 18, ΔABC có : $TC_O^I = 2.\frac{\sin A.\sin B.\sin C}{\sin A + \sin B + \sin C}$ (3)

Từ (*) và (3) $\Rightarrow TC_O^I = 2.\frac{\sin 90^0 \sin^2 45^0}{\sin 90^0 + \sin 45^0} = 2.\frac{1.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$ (đpcm)

Bài 26. Cho tam giác đều ABC có chu vi 30,041975 cm. Tính:

a) Diện tích tam giác ABC.
b) Chiều cao của ΔABC.
c) Bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.
d) Bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC.

<u>**Giải:**</u>

a) Ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{P^2}{3\sqrt{3}}$ = **43,42252635** (cm^2)

b) Ta có h = $\frac{P}{\sqrt{3}}$ = **8,672371177** (cm)

c) Ta có h = $\frac{3}{2}$R $\Rightarrow R = \frac{2P}{3\sqrt{3}}$ = **5,781580784** (cm)

d) Ta có h = 3r $\Rightarrow$ r $= \frac{P}{3\sqrt{3}}$ = **2,890790392** (cm)

Bài 27. Cho ΔABC vuông cân tại A, có chu vi **15,051941**(cm).Tính:

a) Độ dài đường cao xuất phát từ đỉnh A *b)* Độ dài đường cao, đường trung tuyến, đường phân giác xuất phát từ đỉnh B.

<u>Giải:</u> Áp dụng bài 19

a) $h_a = m_a = f_a = \dfrac{P}{1+\sqrt{2}}$ = **3,117359051** (cm)

b) $h_b = h_c = \dfrac{P\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ = **4,408611449** (cm)

$m_b = m_c = \dfrac{P\sqrt{5}}{2+\sqrt{2}}$ = **4,928977443** (cm)

$f_b = f_c = \dfrac{P\sqrt{2}}{\sin\frac{45^0}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)^2}$ = **4,771846646** (cm)

Bài 28. Cho ΔABC vuông cân tại A nội tiếp đường tròn (O;26,031931cm). Tính:

a) Độ dài đường cao xuất phát từ đỉnh A
b) Độ dài đường cao, đường trung tuyến, đường phân giác xuất phát từ đỉnh C.

<u>Giải:</u> Áp dụng bài 20

a) $h_a = m_a = f_a = R$ = **26,031931** (cm)
b) $h_b = h_c = R\sqrt{2}$ = **36,81470987** (cm)

$m_b = m_c = \dfrac{R\sqrt{10}}{2}$ = **41,16009693** (cm)

$f_b = f_c = \dfrac{R\sqrt{2}}{\sin\frac{45^0}{2}(1+\sqrt{2})}$ = **39,84795482** (cm)

Bài 29. Cho ΔABC vuông cân tại A ngoại tiếp đường tròn (I;20,111982cm). Tính:

a) Độ dài đường cao xuất phát từ đỉnh A
b) Độ dài đường cao, đường trung tuyến, đường phân giác xuất phát từ đỉnh C.

<u>Giải:</u> Áp dụng bài 21

a) $h_a = m_a = f_a = r(1+\sqrt{2})$ = **48,55461971** (cm)

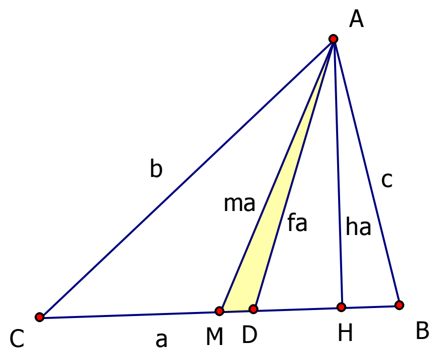
b) $h_b = h_c = r\,(2+\sqrt{2})$ = **68,66660171** (cm)

$m_b = m_c = \frac{r}{2}.(\sqrt{10}+\sqrt{20})$ = **99,36926423** (cm)

$f_b = f_c = \frac{r\sqrt{2}}{\sin\frac{45^0}{2}}$ = **96,20147297** (cm)

Bài 30. Tỉ số diện tích giới hạn bởi đường trung tuyến, đường phân giác của góc A và cạnh BC đối với diện tích tam giác ABC. Kí hiệu là TS_{ABC}^{A}.

CMR: $TS_{ABC}^{A} = \frac{1}{2}\left|\frac{AB-AC}{AB+AC}\right|$.



<u>Giải:</u>

<u>C₁:</u> Giả sử ΔABC có AB < AC (1)

Vì AD là phân giác của góc A nên $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$ (2)

Từ (1), (2) suy ra DB < DC .Do đó điểm D nằm giữa B và M

Ta có $\frac{S_{ADB}}{S_{ADC}} = \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$

$\frac{S_{ADB}}{S_{ADC}+S_{ADB}} = \frac{AB}{AC+AB}$ hay $\frac{S_{ADB}}{S_{ABC}} = \frac{AB}{AC+AB}$ suy ra $S_{ADB} = \frac{S_{ABC}.AB}{AC+AB}$ (3)

Vì AM là trung tuyến nên $S_{ABM} = S_{ACM} = \frac{S_{ABC}}{2}$ (4)

Do đó $S_{ADM} = S_{ABM} - S_{ADB}$ (5)

Từ (3), (4), (5) suy ra $S_{ADM} = \frac{S_{ABC}}{2}.\frac{AC-AB}{AB+AC}$

Hay $\dfrac{S_{ADB}}{S_{ABC}} = \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{AC - AB}{AB + AC}\right|$

Vậy $TS_{ABC}^{A} = \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{AB - AC}{AB + AC}\right|$.

C2: Áp dụng định lí 7, ta có: $TS_{ABC}^{A} = \dfrac{1}{2}.\left|\dfrac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C}\right|$ (a)

Theo định lí hàm sin, ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$\Rightarrow$ sinB = $\dfrac{b}{2R}$, sinC = $\dfrac{c}{2R}$ (b)

Từ (a) và (b) suy ra: $TS_{ABC}^{A} = \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{AB - AC}{AB + AC}\right|$(đpcm).

Bài 31.

Tỉ số diện tích giới hạn bởi đường trung tuyến, đường phân giác của góc A và cạnh BC đối với diện tích tam giác ABC. Kí hiệu là TS_{ABC}^{A}.

a) CMR: $TS_{ABC}^{A} = \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{AB - AC}{AB + AC}\right| = \dfrac{1}{2}.\left|\dfrac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C}\right|$

b) Áp dụng: Với AB = 10 cm. Xác định độ dài cạnh AC của ΔABC để S_{ADM} = 25% S_{ABC}.

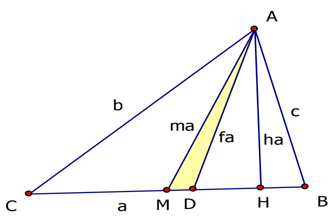
c) Áp dụng: Với $B = 11^0 3'19,45"$. Xác định số đo góc A của ΔABC để S_{ADM} = 30% S_{ABC}.

d) Tính diện tích giới hạn bởi đường trung tuyến, đường phân giác của góc A và cạnh BC đối với diện tích tam giác ABC.Biết diện tích tam giác ABC là 1931,1941 (cm^2) và $B = 26^0 3'$, $C = 15^0 5'$

Giải:

a)

Cách 1:



Giả sử ΔABC có AB < AC (1)

Vì AD là phân giác của góc A nên $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$ (2)

Từ (1), (2) suy ra DB < DC $\Rightarrow$ 2BD < DC + BD

$\Rightarrow BD < \frac{BC}{2} = BM$ .Do đó điểm D nằm giữa B và M

Ta có $\frac{S_{ADB}}{S_{ADC}} = \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$

$\frac{S_{ADB}}{S_{ADC} + S_{ADB}} = \frac{AB}{AC + AB}$ hay $\frac{S_{ADB}}{S_{ABC}} = \frac{AB}{AC + AB}$ suy ra $S_{ADB} = \frac{S_{ABC}.AB}{AC + AB}$ (3)

Vì AM là trung tuyến nên $S_{ABM} = S_{ACM} = \frac{S_{ABC}}{2}$ (4)

Do đó $S_{ADM} = S_{ABM} - S_{ADB}$ (5)

Từ (3), (4), (5) suy ra $S_{ADM} = \frac{S_{ABC}}{2}.\frac{AC - AB}{AB + AC}$

Hay $\frac{S_{ADB}}{S_{ABC}} = \frac{1}{2}\left|\frac{AC - AB}{AB + AC}\right|$

Vậy $TS_{ABC}^{A} = \frac{1}{2}\left|\frac{AB - AC}{AB + AC}\right|$.(a)

Theo định lí hàm sin , ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$\Rightarrow$ sinB = $\frac{b}{2R}$, sinC = $\frac{c}{2R}$

Nên $\frac{1}{2}.\left|\frac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{AB - AC}{AB + AC}\right|$ (b)

Từ (a) và (b) suy ra: $TS_{ABC}^{A} = \frac{1}{2}\left|\frac{AB - AC}{AB + AC}\right| = \frac{1}{2}.\left|\frac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C}\right|$ (đpcm).

<u>Cách 2:</u>

Giả sử ΔABC có AB < AC (1)

Vì AD là phân giác của góc A nên $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$(2)

Từ (1), (2) suy ra DB < DC $\Rightarrow$2BD < DC + BD

$\Rightarrow BD < \frac{BC}{2} = BM$ .Do đó điểm D nằm giữa B và M

$\Rightarrow$DM = BM – BD = $\frac{BC}{2} - BD$

Từ (2) suy ra $BD = \frac{AB.DC}{AC} = \frac{AB(BC - BD)}{AC} = \frac{AB.BC - AB.BD}{\mathrm{AC}}$

$\Rightarrow$BD.AC = AB.BC – AB.BD $\Rightarrow$BD(AB + AC) = AB.BC

$\Rightarrow BD = \frac{AB.BC}{AB + AC}$

$\Rightarrow DM = \frac{BC}{2} - \frac{AB.BC}{AB + AC} = \frac{BC(AB + AC) - 2AB.BC}{2(AB + AC)}$

Ta có $TS_{ABC}^{A} = \frac{AH.DM}{AH.BC} = \frac{DM}{BC} = \frac{BC(AB + AC) - 2AB.BC}{2(AB + AC).BC} = \frac{1}{2}.\frac{AC - AB}{AB + AC}$

Vì dạng tổng quát: AB có thể lớn hơn, nhỏ hơn hoặc bằng AC

Nên ta có: $TS_{ABC}^{A} = \frac{1}{2}\left|\frac{AB - AC}{AB + AC}\right|$(a)

Ta có $AB = \frac{AH}{\sin B}$ và $AC = \frac{AH}{\sin C}$(trong ΔABH vuông tại H, ΔACH vuông tại H)

$$\Rightarrow TS_{ABC}^{A} = \frac{1}{2}\left|\frac{\frac{AH}{\sin B} - \frac{AH}{\sin C}}{\frac{AH}{\sin B} + \frac{AH}{\sin C}}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{\frac{1}{\sin B} - \frac{1}{\sin C}}{\frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{\sin C - \sin B}{\sin B + \sin C}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C}\right| \text{ (b)}$$

Từ (a) và (b) suy ra: $TS_{ABC}^{A} = \frac{1}{2}\left|\frac{AB - AC}{AB + AC}\right| = \frac{1}{2}.\left|\frac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C}\right|$ (đpcm).

b)Theo câu a và giả thiết ta có

$$TS_{ABC}^{A}=\frac{1}{2}\left|\frac{AB-AC}{AB+AC}\right|=\frac{1}{4}\Rightarrow\left|\frac{AB-AC}{AB+AC}\right|=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{AB-AC}{AB+AC}=\frac{1}{2}\\ \frac{AB-AC}{AB+AC}=-\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}AC=\frac{10}{3}\\ AC=30\end{array}\right.$$

Vậy AC = 30 (cm) hoặc AC = $\frac{10}{3}$ (cm) thì S_{ADM} = 25% S_{ABC}

c) Theo câu a và giả thiết ta có

$$TS_{ABC}^{A}=\frac{1}{2}.\left|\frac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}\right|=30\%$$

$$\Leftrightarrow\left|\frac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}\right|=2.30\%\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}=0,6\\ \frac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}=-0,6\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin B=4\sin C\\ 4\sin\mathrm{B}=\sin\mathrm{C}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}C=50^{0}5'17,32"\\ C=129^{0}54'42,68"\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}A=118^{0}51'23,23"\\ A=39^{0}1'57,87"\end{array}\right.$$

d) Áp dụng câu a ta có:

$$TS_{ABC}^{A}=\frac{1}{2}.\left|\frac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}\right|\Rightarrow S_{A}=\frac{1}{2}.\left|\frac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}\right|S_{ABC}$$

=247,0418763 (cm^2)

Bài 32. Cho tam giác ABC có AB + AC = 2015,2016 cm , $B=30^{0}4'19,75"$, $A=75^{0}19'54"$. Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC.

Giải: Ta có $C=180^{0}-(A+B)=74^{0}35'46,55"$

Áp dụng bài 31: Ta có $TS_{ABC}^{A}=\frac{1}{2}\left|\frac{AB-AC}{AB+AC}\right|=\frac{1}{2}.\left|\frac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}\right|$

$$\Rightarrow\left|\frac{AB-AC}{AB+AC}\right|=\left|\frac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}\right|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{AB-AC}{AB+AC}=\frac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}\\ \frac{AB-AC}{AB+AC}=-\frac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2AB=\frac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}.(AB+AC)+AB+AC\\ 2AB=-\frac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}.(AB+AC)+AB+AC\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}AB=689,2025797\\ AB=1325,99902\end{array}\right.$$

Suy ra AB = 689,2025797 (cm), AC = 1325,99902 (cm)

hoặc AC = 689,2025797 (cm), AB = 1325,99902 (cm)

Ta có $\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\text{sinC}} = \frac{BC}{\text{sinA}} \Rightarrow BC =$ 666,7399885 (cm)

Vậy AB = 689,2025797 (cm), AC = 1325,99902 (cm),BC = 666,7399885(cm)

Hoặc AB = 1325,99902 (cm), AC = 689,2025797(cm),BC =666,7399885(cm)

Bài 33. Cho tam giác ABC có chu vi là 20101930cm và tỉ số diện tích của hình tròn nội tiếp tam giác ABC với diện tích của hình tròn ngoại tiếp tam giác đó là a. Nếu chu vi của tam giác ABC tăng gấp 2015 lần mà các góc của tam giác ABC không thay đổi thì tỉ số diện tích của hình tròn nội tiếp tam giác ABC với diện tích của hình tròn ngoại tiếp tam giác đó là bao nhiêu theo a?

Giải:

Áp dụng định lí 12 TS_O^I chỉ phụ thuộc vào số đo các góc của tam giác

Do đó, nếu chu vi của tam giác ABC tăng gấp 2015 lần mà các góc của tam giác ABC không thay đổi thì tỉ số diện tích của hình tròn nội tiếp tam giác ABC với diện tích của hình tròn ngoại tiếp tam giác đó là cũng bằng a.

Bài 34. Cho tam giác DEF có bán kính đường tròn ngoại tiếp là 2011982cm và tỉ số diện tích của hình tròn nội tiếp tam giác DEF với diện tích của hình tròn ngoại tiếp tam giác đó là b. Nếu bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác DEF giảm 2016 lần mà các góc của tam giác DEF không thay đổi thì tỉ số diện tích của hình tròn nội tiếp tam giác DEF với diện tích của hình tròn ngoại tiếp tam giác đó là bao nhiêu theo b?

Giải:

Áp dụng định lí 12 TS_O^I chỉ phụ thuộc vào số đo các góc của tam giác

Do đó, nếu bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác DEF giảm 2016 lần mà các góc của tam giác DEF không thay đổi thì tỉ số diện tích của hình tròn nội tiếp tam giác DEF với diện tích của hình tròn ngoại tiếp tam giác đó cũng bằng b.

Bài 35. Cho tam giác PTQ có bán kính đường tròn nội tiếp là 11319452015cm và tỉ số diện tích của hình tròn nội tiếp tam giác PTQ với diện tích của hình tròn ngoại tiếp tam giác đó là c. Nếu bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác PTQ giảm 2017 lần mà các góc của tam giác PTQ không thay đổi thì tỉ số diện tích của hình tròn nội tiếp tam giác PTQ với diện tích của hình tròn ngoại tiếp tam giác đó là bao nhiêu theo c?

Giải:

Áp dụng định lí 12 TS_O^I chỉ phụ thuộc vào số đo các góc của tam giác

Do đó, nếu bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác PTQ giảm 2017 lần mà các góc của tam giác PTQ không thay đổi thì tỉ số diện tích của hình tròn nội tiếp tam giác PTQ với diện tích của hình tròn ngoại tiếp tam giác đó cũng bằng c.

Bài 36. Cho tam giác ABC có chu vi là 20102015cm và tỉ số diện tích của tam giác ABC với diện tích của hình tròn ngoại tiếp tam giác đó là a. Nếu chu vi của tam giác ABC tăng gấp 2015 lần mà các góc của tam giác ABC không thay đổi thì tỉ số diện tích của tam giác ABC với diện tích của hình tròn ngoại tiếp tam giác đó là bao nhiêu theo a?

Giải:

Áp dụng định lí 12 TS_O^{Δ} chỉ phụ thuộc vào số đo các góc của tam giác

Do đó, nếu chu vi của tam giác ABC tăng gấp 2015 lần mà các góc của tam giác ABC không thay đổi thì tỉ số diện tích của tam giác ABC với diện tích của hình tròn ngoại tiếp tam giác đó cũng bằng a.

Bài 37. Cho tam giác DEF có bán kính đường tròn ngoại tiếp là 2631931cm và tỉ số diện tích của tam giác DEF với diện tích của hình tròn ngoại tiếp tam giác đó là b. Nếu bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác DEF giảm 2016 lần mà các góc của tam giác DEF không thay đổi thì tỉ số diện tích của tam giác DEF với diện tích của hình tròn ngoại tiếp tam giác đó là bao nhiêu theo b?

Giải:

Áp dụng định lí 12 TS_O^{Δ} chỉ phụ thuộc vào số đo các góc của tam giác

Do đó, nếu bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác DEF giảm 2016 lần mà các góc của tam giác DEF không thay đổi thì tỉ số diện tích của tam giác DEF với diện tích của hình tròn ngoại tiếp tam giác đó cũng bằng b.

Bài 38. Cho tam giác PTQ có bán kính đường tròn nội tiếp là 561911cm và tỉ số diện tích của tam giác PTQ với diện tích của hình tròn ngoại tiếp tam giác đó là c. Nếu bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác PTQ giảm 2017 lần mà các góc của tam giác PTQ không thay đổi thì tỉ số diện tích của tam giác PTQ với diện tích của hình tròn ngoại tiếp tam giác đó là bao nhiêu theo c?

Giải:

Áp dụng định lí 12 TS_O^{Δ} chỉ phụ thuộc vào số đo các góc của tam giác

Do đó, nếu bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác PTQ giảm 2017 lần mà các góc của tam giác PTQ không thay đổi thì tỉ số diện tích của tam giác PTQ với diện tích của hình tròn ngoại tiếp tam giác đó cũng bằng c.

Bài 39. Cho tam giác ABC có chu vi là 2772015cm và tỉ số diện tích của tam giác ABC với diện tích của hình tròn nội tiếp tam giác đó là a. Nếu chu vi của tam giác ABC tăng gấp 2015 lần mà các góc của tam giác ABC không thay đổi thì tỉ số diện tích của tam giác ABC với diện tích của hình tròn nội tiếp tam giác đó là bao nhiêu theo a?

Giải:

Áp dụng định lí 12 TS_I^{Δ} chỉ phụ thuộc vào số đo các góc của tam giác

Do đó, nếu chu vi của tam giác ABC tăng gấp 2015 lần mà các góc của tam giác ABC không thay đổi thì tỉ số diện tích của tam giác ABC với diện tích của hình tròn nội tiếp tam giác đó cũng bằng a.

Bài 40. Cho tam giác DEF có bán kính đường tròn ngoại tiếp là 2632015cm và tỉ số diện tích của tam giác DEF với diện tích của hình tròn nội tiếp tam giác đó là b. Nếu bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác DEF giảm 2016 lần mà các góc của tam giác DEF không thay đổi thì tỉ số diện tích của tam giác DEF với diện tích của hình tròn nội tiếp tam giác đó là bao nhiêu theo b?

Giải:

Áp dụng định lí 12 TS_I^{Δ} chỉ phụ thuộc vào số đo các góc của tam giác

Do đó, nếu bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác DEF giảm 2016 lần mà các góc của tam giác DEF không thay đổi thì tỉ số diện tích của tam giác DEF với diện tích của hình tròn nội tiếp tam giác đó cũng bằng b.

Bài 41. Cho tam giác PTQ có bán kính đường tròn nội tiếp là 2581911cm và tỉ số diện tích của tam giác PTQ với diện tích của hình tròn nội tiếp tam giác đó là c. Nếu bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác PTQ giảm 2017 lần mà các góc của tam giác PTQ không thay đổi thì tỉ số diện tích của tam giác PTQ với diện tích của hình tròn nội tiếp tam giác đó là bao nhiêu theo c?

Giải:

Áp dụng định lí 12 TS_I^{Δ} chỉ phụ thuộc vào số đo các góc của tam giác

Do đó, nếu bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác PTQ giảm 2017 lần mà các góc của tam giác PTQ không thay đổi thì tỉ số diện tích của tam giác PTQ với diện tích của hình tròn nội tiếp tam giác đó cũng bằng c.

Bài 42. Cho tam giác ABC có chu vi là 10101972cm, tỉ số diện tích tam giác tạo bởi đường trung tuyến, đường phân giác của đỉnh A và cạnh BC với diện tích của tam giác ABC là a. Nếu chu vi của tam giác ABC tăng gấp 2015 lần mà các góc của tam giác ABC không thay đổi thì tỉ số diện tích tam giác tạo bởi đường trung tuyến, đường phân giác của đỉnh A và cạnh BC với diện tích của tam giác ABC là bao nhiêu theo a?

Giải:

Áp dụng định lí 12 TS_{ABC}^{A} chỉ phụ thuộc vào số đo các góc của tam giác

Do đó, nếu chu vi của tam giác ABC tăng gấp 2015 lần mà các góc của tam giác ABC không thay đổi thì tỉ số diện tích diện tích tam giác tạo bởi đường trung tuyến, đường phân giác của đỉnh A và cạnh BC với diện tích của tam giác ABC cũng bằng a.

Bài 43. Cho tam giác ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp là 26,32016cm, tỉ số diện tích tam giác tạo bởi đường trung tuyến, đường phân giác của đỉnh A và cạnh BC với diện tích của tam giác ABC là b. Nếu bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC tăng gấp 2016 lần mà các góc của tam giác ABC không thay đổi thì tỉ số diện tích tam giác tạo bởi đường trung tuyến, đường phân giác của đỉnh A và cạnh BC với diện tích của tam giác ABC là bao nhiêu theo b?

Giải:

Áp dụng định lí 12 TS_{ABC}^{A} chỉ phụ thuộc vào số đo các góc của tam giác

Do đó, nếu bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC tăng gấp 2016 lần mà các góc của tam giác ABC không thay đổi thì tỉ số diện tích tam giác tạo bởi đường trung tuyến, đường phân giác của đỉnh A và cạnh BC với diện tích của tam giác ABC cũng bằng b.

Bài 44. Cho tam giác ABC có bán kính đường tròn nội tiếp là 258191113102013cm, tỉ số diện tích tam giác tạo bởi đường trung tuyến, đường phân giác của đỉnh A và cạnh BC với diện tích của tam giác ABC là c. Nếu bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác ABC giảm 2017 lần mà các góc của tam giác ABC không thay đổi thì tỉ số diện tích tam giác tạo bởi đường trung tuyến, đường phân giác của đỉnh A và cạnh BC với diện tích của tam giác ABC là bao nhiêu theo c?

Giải:

Áp dụng định lí 12 TS_{ABC}^{A} chỉ phụ thuộc vào số đo các góc của tam giác

Do đó, nếu bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác ABC giảm 2017 lần mà các góc của tam giác ABC không thay đổi thì tỉ số diện tích tam giác tạo bởi đường trung tuyến, đường phân giác của đỉnh A và cạnh BC với diện tích của tam giác ABC cũng bằng c.

Bài 45. Cho tam giác ABC có chu vi là 2015,2016cm và tỉ số đường cao với đường phân giác góc A của tam giác ABC là a. Nếu chu vi của tam giác ABC tăng gấp 200 lần mà các góc của tam giác ABC không thay đổi thì tỉ số đường cao với đường phân giác góc A của tam giác ABC là bao nhiêu theo a?

Giải:

Áp dụng định lí 12 $T_{f_a}^{h_a}$ chỉ phụ thuộc vào số đo các góc của tam giác

Do đó, nếu chu vi của tam giác ABC tăng gấp 200 lần mà các góc của tam giác ABC không thay đổi thì tỉ số đường cao với đường phân giác góc A của tam giác ABC là bao nhiêu theo a

Bài 46. Cho tam giác ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp là 2016,2017cm và tỉ số đường cao với đường phân giác góc A của tam giác ABC là b. Nếu bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC tăng gấp 300 lần mà các góc của tam giác ABC không thay đổi thì tỉ số đường cao với đường phân giác góc A của tam giác ABC là bao nhiêu theo b?

Giải:

Áp dụng định lí 12 $T_{f_a}^{h_a}$ chỉ phụ thuộc vào số đo các góc của tam giác

Do đó, nếu bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC tăng gấp 300 lần mà các góc của tam giác ABC không thay đổi thì tỉ số đường cao với đường phân giác góc A của tam giác ABC cũng bằng b.

Bài 47. Cho tam giác ABC có bán kính đường tròn nội tiếp là 2017,2018cm và tỉ số đường cao với đường phân giác góc A của tam giác ABC là c. Nếu bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC giảm 400 lần mà các góc của tam giác ABC không thay đổi thì tỉ số đường cao với đường phân giác góc A của tam giác ABC là bao nhiêu theo c?

Giải:

Áp dụng định lí 12 $T_{f_a}^{h_a}$ chỉ phụ thuộc vào số đo các góc của tam giác

Do đó, nếu bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC giảm 400 lần mà các góc của tam giác ABC không thay đổi thì tỉ số đường cao với đường phân giác góc A của tam giác ABC cũng bằng c.

Bài 48. Cho tam giác ABC có chu vi là 19541975cm và tỉ số đường cao với đường trung tuyến góc A của tam giác ABC là a. Nếu chu vi của tam giác ABC tăng gấp 21 lần mà các góc của tam giác ABC không thay đổi thì tỉ số đường cao với đường trung tuyến góc A của tam giác ABC là bao nhiêu theo a?

Giải:

Áp dụng định lí 12 $T_{m_a}^{h_a}$ chỉ phụ thuộc vào số đo các góc của tam giác

Do đó, nếu chu vi của tam giác ABC tăng gấp 200 lần mà các góc của tam giác ABC không thay đổi thì tỉ số đường cao với đường trung tuyến góc A của tam giác ABC cũng bằng a .

Bài 49. Cho tam giác ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp là 1930,1945cm và tỉ số đường cao với trung tuyến góc A của tam giác ABC là b. Nếu bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC tăng gấp 15 lần mà các góc của tam giác ABC không thay đổi thì tỉ số đường cao với đường trung tuyến góc A của tam giác ABC là bao nhiêu theo b?

Giải:

Áp dụng định lí 12 $T_{m_a}^{h_a}$ chỉ phụ thuộc vào số đo các góc của tam giác

Do đó, nếu bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC tăng gấp 15 lần mà các góc của tam giác ABC không thay đổi thì tỉ số đường cao với đường trung tuyến góc A của tam giác ABC cũng bằng b.

Bài 50. Cho tam giác ABC có bán kính đường tròn nội tiếp là 19451954cm và tỉ số đường cao với đường trung tuyến góc A của tam giác ABC là c. Nếu bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC giảm 9 lần mà các góc của tam giác ABC không thay đổi thì tỉ số đường cao với đường trung tuyến góc A của tam giác ABC là bao nhiêu theo c?

Giải:

Áp dụng định lí 12 $T_{m_a}^{h_a}$ chỉ phụ thuộc vào số đo các góc của tam giác

Do đó, nếu bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC giảm 9 lần mà các góc của tam giác ABC không thay đổi thì tỉ số đường cao với đường trung tuyến góc A của tam giác ABC cũng bằng c.

Bài 51. Cho tam giác ABC có chu vi là 19311941cm và tỉ số đường phân giác với đường trung tuyến góc A của tam giác ABC là a. Nếu chu vi của tam giác ABC tăng gấp 10 lần mà các góc của tam giác ABC không thay đổi thì tỉ số phân giác với đường trung tuyến góc A của tam giác ABC là bao nhiêu theo a?

Giải:

Áp dụng định lí 12 $T_{m_a}^{f_a}$ chỉ phụ thuộc vào số đo các góc của tam giác

Do đó, nếu chu vi của tam giác ABC tăng gấp 10 lần mà các góc của tam giác ABC không thay đổi thì tỉ số phân giác với đường trung tuyến góc A của tam giác ABC là bao nhiêu theo a

Bài 52. Cho tam giác ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp là 19451975cm và tỉ số đường phân giác với trung tuyến góc A của tam giác ABC là b. Nếu bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC tăng gấp 30 lần mà các góc của tam giác ABC không thay đổi thì tỉ số đường phân giác với đường trung tuyến góc A của tam giác ABC là bao nhiêu theo b?

Giải:

Áp dụng định lí 12 $T_{m_a}^{f_a}$ chỉ phụ thuộc vào số đo các góc của tam giác

Do đó, nếu bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC tăng gấp 30 lần mà các góc của tam giác ABC không thay đổi thì tỉ số đường phân giác với đường trung tuyến góc A của tam giác ABC cũng bằng b.

Bài 53. Cho tam giác ABC có bán kính đường tròn nội tiếp là 201019302015cm và tỉ số đường phân giác với đường trung tuyến góc A của tam giác ABC là c. Nếu bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC giảm 85 lần mà các góc của tam giác ABC không thay đổi thì tỉ số đường phân giác với đường trung tuyến góc A của tam giác ABC là bao nhiêu theo c?

Giải:

Áp dụng định lí 12 $T_{m_a}^{f_a}$ chỉ phụ thuộc vào số đo các góc của tam giác

Do đó, nếu bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC giảm 85 lần mà các góc của tam giác ABC không thay đổi thì tỉ số đường phân giác với đường trung tuyến góc A của tam giác ABC cũng bằng c.

Bài 54. Cho tam giác ABC có chu vi là 2015cm và tỉ số chu vi của tam giác ABC với chu vi của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó là a. Nếu chu vi của tam giác ABC tăng gấp 2016 lần mà các góc của tam giác ABC không thay đổi thì tỉ số chu vi của tam giác ABC với chu vi của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó là bao nhiêu theo a?

Giải:

Áp dụng định lí 19 TC_O^{Δ} chỉ phụ thuộc vào số đo các góc của tam giác

Do đó, nếu chu vi của tam giác ABC tăng gấp 2016 lần mà các góc của tam giác ABC không thay đổi thì tỉ số chu vi của tam giác ABC với chu vi của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó cũng bằng a.

Bài 55. Cho tam giác DEF có chu vi là 1975 cm và tỉ số chu vi của tam giác DEF với chu vi của đường tròn nội tiếp tam giác đó là b. Nếu chu vi của tam giác DEF giảm 304 lần mà các góc của tam giác DEF không thay đổi thì tỉ số chu vi của tam giác DEF với chu vi của đường tròn nội tiếp tam giác đó là bao nhiêu theo b?

<u>Giải:</u>

Áp dụng định lí 19 TC_I^{Δ} chỉ phụ thuộc vào số đo các góc của tam giác

Do đó, nếu chu vi của tam giác DEF giảm 304 lần mà các góc của tam giác ABC không thay đổi thì tỉ số chu vi của tam giác DEF với chu vi của đường tròn nội tiếp tam giác đó cũng bằng b.

Bài 56. Cho tam giác PTQ có chu vi là 1954 cm và tỉ số chu vi của đường tròn nội tiếp tam giác PTQ với chu vi của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó là c. Nếu chu vi của tam giác PTQ giảm 7,5 lần mà các góc của tam giác PTQ không thay đổi thì tỉ số chu vi của đường tròn nội tiếp tam giác PTQ với chu vi của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó là bao nhiêu theo c?

<u>Giải:</u>

Áp dụng định lí 19 TC_O^I chỉ phụ thuộc vào số đo các góc của tam giác

Do đó, nếu chu vi của tam giác PTQ giảm 7,5 lần mà các góc của tam giác PTQ không thay đổi thì tỉ số chu vi của đường tròn nội tiếp tam giác PTQ với chu vi của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó cũng bằng c.

Bài 57. Cho tam giác ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp là 2016cm và tỉ số chu vi của tam giác ABC với chu vi của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó là a. Nếu bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC giảm 2015 lần mà các góc của tam giác ABC không thay đổi thì tỉ số chu vi của tam giác ABC với chu vi của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó là bao nhiêu theo a?

<u>Giải:</u>

Áp dụng định lí 19 TC_O^{Δ} chỉ phụ thuộc vào số đo các góc của tam giác

Do đó, nếu bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC giảm 2015 lần mà các góc của tam giác ABC không thay đổi thì tỉ số chu vi của tam giác ABC với chu vi của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó là bằng a.

Bài 58. Cho tam giác DEF có bán kính đường tròn ngoại tiếp là 1941 cm và tỉ số chu vi của tam giác DEF với chu vi của đường tròn nội tiếp tam giác đó là b. Nếu bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác DEF tăng 155 lần mà các góc của tam giác DEF không thay đổi thì tỉ số chu vi của tam giác DEF với chu vi của đường tròn nội tiếp tam giác đó là bao nhiêu theo b?

<u>Giải:</u>

Áp dụng định lí 19 TC_I^{Δ} chỉ phụ thuộc vào số đo các góc của tam giác

Do đó, nếu bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác DEF tăng 155 lần mà các góc của tam giác DEF không thay đổi thì tỉ số chu vi của tam giác DEF với chu vi của đường tròn nội tiếp tam giác đó cũng bằng b.

Bài 59. Cho tam giác PTQ có bán kính đường tròn ngoại tiếp là 1945 cm và tỉ số chu vi của đường tròn nội tiếp tam giác PTQ với chu vi của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó là c. Nếu bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác PTQ tăng 29 lần mà các góc của tam giác PTQ không thay đổi thì tỉ số chu vi của đường tròn nội tiếp tam giác PTQ với chu vi của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó là bao nhiêu theo c?

<u>Giải:</u>

Áp dụng định lí 19 TC_O^I chỉ phụ thuộc vào số đo các góc của tam giác

Do đó, nếu bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác PTQ tăng 29 lần mà các góc của tam giác PTQ không thay đổi thì tỉ số chu vi của đường tròn nội tiếp tam giác PTQ với chu vi của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó cũng bằng c.

Bài 60. Cho tam giác ABC có bán kính đường tròn nội tiếp là 1944 cm và tỉ số chu vi của tam giác ABC với chu vi của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó là a. Nếu bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác ABC giảm 2212 lần mà các góc của tam giác ABC không thay đổi thì tỉ số chu vi của tam giác ABC với chu vi của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó là bao nhiêu theo a?

<u>Giải:</u>

Áp dụng định lí 19 TC_O^{Δ} chỉ phụ thuộc vào số đo các góc của tam giác

Do đó, nếu bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác ABC giảm 2212 lần mà các góc của tam giác ABC không thay đổi thì tỉ số chu vi của tam giác ABC với chu vi của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó cũng bằng a.

Bài 61. Cho tam giác DEF có bán kính đường tròn nội tiếp là 1911 cm và tỉ số chu vi của tam giác DEF với chu vi của đường tròn nội tiếp tam giác đó là b. Nếu bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác DEF tăng 258 lần mà các góc của tam giác DEF không thay đổi thì tỉ số chu vi của tam giác DEF với chu vi của đường tròn nội tiếp tam giác đó là bao nhiêu theo b?

Giải:

Áp dụng định lí 19 TC_I^{Δ} chỉ phụ thuộc vào số đo các góc của tam giác

Do đó, nếu bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác DEF tăng 258 lần mà các góc của tam giác DEF không thay đổi thì tỉ số chu vi của tam giác DEF với chu vi của đường tròn nội tiếp tam giác đó cũng bằng b.

Bài 62. Cho tam giác PTQ có bán kính đường tròn nội tiếp là 1890 cm và tỉ số chu vi của đường tròn nội tiếp tam giác PTQ với chu vi của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó là c. Nếu bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác PTQ tăng 195 lần mà các góc của tam giác PTQ không thay đổi thì tỉ số chu vi của đường tròn nội tiếp tam giác PTQ với chu vi của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó là bao nhiêu theo c?

Giải:

Áp dụng định lí 19 TC_O^{I} chỉ phụ thuộc vào số đo các góc của tam giác

Do đó, nếu bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác PTQ tăng 195 lần mà các góc của tam giác PTQ không thay đổi thì tỉ số chu vi của đường tròn nội tiếp tam giác PTQ với chu vi của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó cũng bằng c.

Bài 63. Cho tam giác ABC có tỉ số diện tích giữa đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp của tam giác 0,1951890. Tính tỉ số chu vi của hai đường tròn đó.

Giải:

Áp dụng định lí 20 ta có $TS_O^I = \left(TC_O^I\right)^2$. Do đó tỉ số chu vi của hai đường tròn đó là $\sqrt{0{,}1951890} = 0{,}441801991$

Bài 64. Cho tam giác ABC có tỉ số chu vi giữa đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp của tam giác 0,291969. Tính tỉ số diện tích của hai đường tròn đó.

Giải:

Áp dụng định lí 20 ta có $TS_O^I = \left(TC_O^I\right)^2$. Do đó tỉ số diện tích của hai đường tròn đó là $0{,}291969^2 = 0{,}085245896961$

Bài 65. Cho tam giác ABC có tỉ số diện tích giữa tam giác với đường tròn nội tiếp của tam giác đó là 1,875476865 thì tỉ số chu vi giữa tam giác với đường tròn nội tiếp của tam giác đó bằng bao nhiêu?

Giải:

Áp dụng định lí 21 ta có $TS_I^\Delta = TC_I^\Delta$. Do đó tỉ số chu vi giữa tam giác với đường tròn nội tiếp của tam giác cũng bằng 1,875476865.

Bài 66. Cho tam giác ABC có tỉ số chu vi giữa tam giác với đường tròn nội tiếp của tam giác đó là 1,6885402279 thì tỉ số diện tích giữa tam giác với đường tròn nội tiếp của tam giác đó bằng bao nhiêu?

Giải:

Áp dụng định lí 21 ta có $TS_I^\Delta = TC_I^\Delta$. Do đó tỉ số chu vi giữa tam giác với đường tròn nội tiếp của tam giác cũng bằng 1,6885402279.

Bài 67. Cho tam giác ABC có $B = C = 45^0$ và ba đỉnh cùng nằm trên một đường tròn tâm O bán kính R = 19,051890 (cm) .

a) Tính diện tích giới hạn bởi đường tròn tâm O và các cạnh của tam giác ABC.

b) Tính tỉ số chu vi tam giác ABC với chu vi đường tròn tâm O.

Giải:

a) Theo giả thiết ta có tam giác ABC vuông cân tại A nên $2AB^2 = BC^2$ và BC = 2R

Suy ra $AB^2 = 2R^2 \Rightarrow AB = R\sqrt{2}$

Suy ra: Diện tích tam giác ABC là: R^2

Do đó diện tích giới hạn bởi đường tròn tâm O và các cạnh của tam giác ABC là: $\pi R^2 - R^2 = R^2(\pi - 1)$ = **77,3435496** cm^2

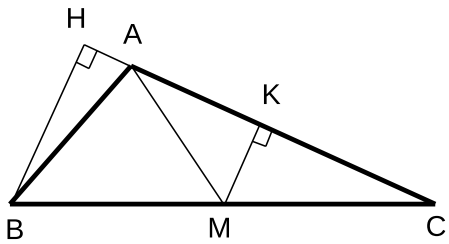
b) *Cách 1*: Tỉ số chu vi tam giác ABC với chu vi đường tròn tâm O là:

$\frac{2AB + BC}{2R\pi} = \frac{2R\sqrt{2} + 2R}{2R\pi} = \frac{\sqrt{2}+1}{\pi}$ = 0,768468044

Cách 2: (áp dụng công thức)

Theo định lý 17, ta có $TC_O^{\Delta} = \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\pi}$ =0,768468044

Bài 68. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 120^0$, AB = 4, AC = 6. M là trung điểm của BC. Tính độ dài đoạn thẳng AM chính xác đến 0,0001.



<u>Giải:</u>

Cách 1:

Vẽ BH ⊥ AC và MK ⊥ AC. Áp dụng định lí Pi ta go cho tam giác vuông ABH:

$BH^2 = AB^2 - AH^2 \Leftrightarrow BH = \sqrt{AB^2 - AH^2}$

Do $\hat{A} = 120^0$ nên $\widehat{HAB} = 60^0$ và suy ra AH = $\frac{AB}{2} = 2$.

Suy ra BH = $AB\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

Do MK là đường trung bình của tam giác BHC

nên HK = $\frac{1}{2}$HC = $\frac{1}{2}$(AC + AH) = 4

Suy ra AK = HK – AH = 4 – 2 = 2

Lại có MK $=\frac{1}{2}$BH $=\sqrt{3}$ nên AM^2 =AK^2 + MK^2 =4 + 3 =7

$\Rightarrow$AM $=\sqrt{7}$ .Tính được AM $\approx$ 2,6458

Cách 2: Áp dụng công thức

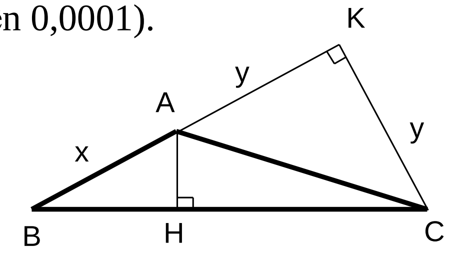
Ta có BC^2 = AB^2 + AC^2 – 2AB.AC.cosA $\Rightarrow$BC = $2\sqrt{19}$

Ta có $2AM^2 = AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2} \Rightarrow$ AM $=\sqrt{7} \approx$ 2,6458

Bài 69.

Cho tam giác ABC có $\widehat{A}=135^0$, BC = 5, đường cao AH = 1. Tính độ dài các cạnh AB và AC (chính xác đến 0,0001).

<u>Giải:</u>



Cách 1:

Vẽ CK $\perp$ AB ta có $\widehat{CAK} = 135^0$=180^0 - 135^0 = 45^0 nên tam giác CAK vuông cân tại K

Đặt AB = x > 0, AK = CK = y > 0. ΔHBA đồng dạng với ΔKBC (gg) nên

$$\frac{AH}{KC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{x}{5} \Leftrightarrow xy = 5 \ (1)$$

Áp dụng pitago cho tam giác vuông BKC:

BK^2 + KC^2 = BC^2 $\Leftrightarrow$ (x + y)^2 + y^2 = 25 $\Leftrightarrow$ x^2 + 2xy + 2y^2 = 25 (2)

Từ (1) và (2) tìm được (x ;y) = $\left(\sqrt{5};\sqrt{5}\right)$

hoặc (x ; y) = $\left(\sqrt{10};\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

Từ đó suy ra AB = $\sqrt{5} \approx 2,2361$; AC=$\sqrt{10} \approx 3,1623$ hoặc AB=$\sqrt{10} \approx 3,1623$; AC=$\sqrt{5} \approx 2,2361$.

Cách 2: (không kẻ hình phụ, áp dụng công thức)

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A$ (*)

Ta có $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{5}{\sin 135^0} = \frac{AC}{\frac{AH}{AB}} = \frac{AB}{\frac{AH}{AC}}$

$$\Rightarrow \frac{5}{\sin 135^0} = \frac{AB.AC}{AH} = \frac{AC.AB}{AH}$$

$\Rightarrow AB.AC = 5\sqrt{2}$ (**) thay vào (*) ta được

$AB^2 + AC^2 = 25 + 2.\ 5\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 15$

Hay $AB^2 + AC^2 = 15$ (***)

Từ (**)và (***) suy ra AB = $\sqrt{5} \approx 2,2361$; AC=$\sqrt{10} \approx 3,1623$ hoặc AB=$\sqrt{10} \approx 3,1623$; AC=$\sqrt{5} \approx 2,2361$.

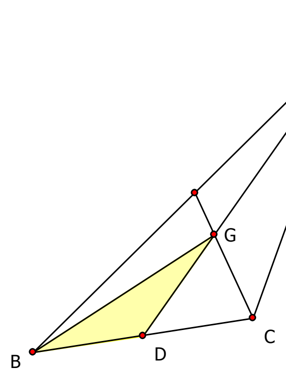
Bài 70. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy . Cho ba điểm $A\left(\frac{1931}{26};\frac{1931}{3}\right)$; $B\left(\frac{1945}{11};\frac{1945}{3}\right)$; $C\left(\frac{1945}{2};\frac{1945}{9}\right)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

a) Tính diện tích tam giác BGD *(với D là trung điểm của cạnh BC)*

b) Tính số đo các góc A, B của tam giác ABC theo "độ, phút, giây".

c) Tính tỉ số diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác ABC đối với hình tròn nội tiếp tam giác ABC.

Giải:



a) Ta có AB = $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \approx$ 102,6550785

AC = $\sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} \approx$ 994,7976015

BC = $\sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} \approx$ 905,4974352

Suy ra : AB + AC + BC = 102,6550785 + 994,7976015 + 905,4974352

$\approx$ 2002,950115

$$\Rightarrow \frac{AB + AC + BC}{2} = P \approx 1001,475058$$

Do đó Diện tích tam giác ABC là : $S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p - AB)(p - AC)(p - BC)} \approx$ 24018,55866 (đvdt)

Ta có $S_{BGD} = \frac{1}{3} S_{ABD}$ (vì GD = $\frac{1}{3}$AD) và $S_{ABD} = \frac{1}{2} S_{ABC}$ (DB =DC)

Nên $S_{BGD} = \frac{1}{6} S_{ABC} \approx$ 4 003,09311 (đvdt)

b) $S_{\Delta ABC} = \frac{AB.AC.\sin A}{2} = \frac{AB.BC.\sin B}{2}$

$$\Rightarrow A = \sin^{-1}\left(\frac{2S_{\Delta ABC}}{AB.AC}\right) = 28^0 3' 35,55''$$

$$\Rightarrow B = \sin^{-1}\left(\frac{2S_{\Delta ABC}}{AB.BC}\right) = 31^0 7' 0,45''$$

c) Gọi R, r là bán kính đường tròn ngoại tiếp , nội tiếp tam giác ABC

Ta có $S_{\Delta ABC} = \dfrac{AB.AC.BC}{4R} \Rightarrow R = \dfrac{AB.AC.BC}{4S_{\Delta ABC}} \approx$ 962,4883022

Ta có $S_{\Delta ABC} = p.r \Rightarrow r = \dfrac{S_{\Delta ABC}}{p} \approx$ 23,98318209

Tỉ số diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác ABC đối với hình tròn nội tiếp tam giác ABC là: $\dfrac{\pi R^2}{\pi r^2} = \dfrac{R^2}{r^2} \approx$ 1 610,561489

Bài 71. Cho tam giác ABC có các đỉnh $A(1;-2),\ B(3;4),\ C(0;5)$.

Tính diện tích và bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác ABC.

<u>HD:</u> $AB = 2\sqrt{10};\ AC = \sqrt{10};\ BC = 5\sqrt{2};\ p \approx 8,2790$

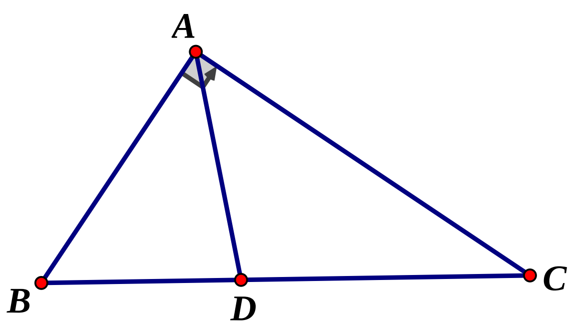
Ta có diện tích tam giác ABC là: $S = 10, r = \dfrac{S}{p} \approx 1,2079$.

Ta có công thức: $S = \dfrac{abc}{4R} \Rightarrow R = \dfrac{abc}{4S} \approx 3,5355\ (cm)$

Bài 72. Cho tam giác ABC vuông tại A, biết BC = 9,215 cm và AD là tia phân giác của góc A, BD = 3,628 cm. Tính *(chính xác đến 4 chữ số thập phân)*

a) Độ dài cạnh AB, AC
b) Số đo góc B, góc C của tam giác ABC *(làm tròn đến độ)*
c) Diện tích tam giác ADC
d) Bán kính R đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC
e) Bán kính r đường tròn nội tiếp tam giác ABC
f) Độ dài phân giác AD

<u>Giải:</u>



a) Ta có $\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{DC}$ (Tính chất đường phân giác trong)

$\Leftrightarrow \frac{AB^2}{AC^2}=\frac{DB^2}{DC^2}\Rightarrow \frac{AB^2}{AB^2+AC^2}=\frac{DB^2}{DB^2+DC^2}$

Hay $\frac{AB^2}{BC^2}=\frac{DB^2}{DB^2+DC^2}$

$\Rightarrow \quad AB^2=\frac{DB^2.BC^2}{DB^2+DC^2}=\frac{DB^2.BC^2}{DB^2+(BC-DB)^2}$

$\Rightarrow AB=\frac{DB.BC}{\sqrt{DB^2+(BC-DB)^2}}=\frac{3,628.9,215}{\sqrt{3,628^2+(9,215-3,628)^2}}=5,0186$ (cm)

Do đó $AC=\frac{AB.DC}{DB}=\frac{5,0186(9,215-3,628)}{3,628}=7,7285$ (cm)

b) Ta có $\sin B=\frac{AC}{BC}=\frac{7,7285}{9,215}\Rightarrow B=57^0$ nên $C=90^0-B=33^0$

c) Ta có $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}CD.CA.\sin C=\frac{1}{2}(9,215-3,628).7,7285.\sin 33^0=11,7585$ (cm^2)

d) **<u>Cách 1</u>**: Vì ΔABC vuông tại A nên bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC là :

R $=\frac{BC}{2}=\frac{9,215}{2}=4,6075$ (cm)

<u>Cách 2 :</u> Ta có $S_{\Delta ABC}=\frac{AB.AC.BC}{4R}=\frac{1}{2}AB.AC$.

Suy ra R $=\frac{BC}{2}=\frac{9,215}{2}=4,6075$ (cm)

<u>Cách 3</u> : Áp dụng định lý hàm sin trong ΔABC.

Ta có $\frac{BC}{\sin A}=2R\Rightarrow R=\frac{BC}{2\sin A}=\frac{BC}{2\sin 90^0}=\frac{BC}{2}=4,6075$ (cm)

e)Ta có $S_{\Delta ABC}=\frac{(AB+AC+BC)}{2}.r=\frac{1}{2}AB.AC$. Suy ra

$r=\frac{AB.AC}{AB+AC+BC}=\frac{5,0186.7,7285}{5,0186+9,215+7,7285}=1,1761$(cm)

f) Ta có $S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}AB.AD.\sin BAD = \frac{1}{2}BA.BD.\sin ABD$

$\Rightarrow AD = \frac{BD.\sin ABD}{\sin BAD} = \frac{3,628.\sin 57^0}{\sin 45^0} = 4,3030$ (cm)

BÀI TẬP TỰ LUYỆN - GIẢI NHANH CÓ ĐÁP ÁN

1. Tính số đo các góc của ΔABC biết rằng $21A = 14B = 6C$. Tính số đo của các góc A, B, C.
   ĐS: 30^0; 45^0; 105^0

2. Cho ΔABC có chu vi bằng 58 (cm), $B = 82,35^0; C = 57^0 18'$. Tính độ dài mỗi cạnh của tam giác.
   ĐS: 15,14; 23,18; 19,68

3. Cho tam giác ABC có ba cạnh là a = 8,32; b = 7,61; c = 6,95. Tính số đo các góc của tam giác bằng độ, phút, giây.
   ĐS: $A = 69^0 31' 49''$

4. Cho tam giác vuông có các cạnh góc vuông là $\sqrt[3]{4}$ (cm) và $\sqrt[4]{3}$ (cm). Bình phương độ dài đường trung tuyến ứng với cạnh huyền có độ dài bằng bao nhiêu?
   ĐS: 1,063 (cm)

5. Cho ΔABC có độ dài AB = 6 (cm), AC = 12 (cm), BC = 16 (cm). Tính độ dài đường trung tuyến ứng với góc A.
   ĐS: 5,099 (cm)

6. Cho ΔABC vuông tại A với AB = 15 (cm), BC = 26 (cm). Tính độ dài đường phân giác trong AI.
   ĐS:12,43 (cm)

7. Cho ΔABC có AB = 6 (cm), AC = 12 (cm) và $A = 120^0$. Kẻ phân giác AD. Tính độ dài AD.
   ĐS: 4 (cm)

8. Tính diện tích tam giác có độ dài ba cạnh là 30,75 (cm); 40,98 (cm); 51,225 (cm)
   ĐS: 630,067 (cm^2)

9. Tính diện tích ΔABC biết AB = 4,5 (cm) ; AC = 9,6 (cm); $A = 60^0$.
   ĐS: 18,7 (cm^2)

10. Cho ΔABC có ba cạnh : a = 15 (cm); b = 13 (cm); c = 12 (cm). Ba đường phân giác trong cắt 3 cạnh tại A_1, B_1, C_1. Tính diện tích tam giác $A_1B_1C_1$.
    ĐS: 18,53(cm^2)

11. Tính diện tích hình tròn nội tiếp tam giác đều có cạnh a = 12, 46 (cm).

ĐS: 40,64(cm^2)

12. Chu vi đường tròn ngoại tiếp tam giác đều có cạnh a = 4,6872 (cm).
ĐS: 17(cm)

13. Cho ΔABC có chu vi bằng 58 (cm), $B = 58^0 20^{'}; C = 82^0 35^{'}$. Tính độ dài đường cao AH của tam giác ABC.
ĐS: 19,79288254(cm)

14. Cho tam giác có chu vi là 49,49 (cm) , các cạnh tỉ lệ 20:21:29. Tính khoảng cách từ giao điểm của ba đường phân giác tới mỗi cạnh của tam giác.
ĐS: 4,242 (cm)

15. Cho ΔABC có AB = 6 (cm), BC = 12 (cm) và $B = 120^0$. Phân giác trong của góc B cắt cạnh AC tại D. Tính diện tích tam giác ABD.
ĐS: 10,39 (cm^2)

16. Tính diện tích của một tam giác nội tiếp trong đường tròn, có các đỉnh của tam giác chia đường tròn thành ba cung có độ dài là 3 (cm); 4 (cm); 5 (cm).
ĐS: 4,315 (cm^2)

17. Cho ΔABC có AB = 6,75 (cm); AC = 8,42 (cm); BC = 10,27 (cm). Đường phân giác trong của góc A cắt đường thẳng BC ở D. Tính độ dài BD.
ĐS: 4,57 (cm)

18. Hình chữ nhật có bình phương độ dài cạnh nhỏ là 2 (cm) và diện tích của hình chữ nhật là 40 (cm^2). Tính độ dài cạnh còn lại.
ĐS: 28,28 (cm^2)

19. Cho ΔABC vuông tại A quay cạnh AC. Biết BC = 5,025 (cm) và $B = 68^0$. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình tạo thành.
ĐS: S_{xq} = 29,7 (cm^2); V = 17,3 (cm^3)

20. Cho bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác lần lượt là 5(m) và 2 (m). Tính khoảng cách giữa hai tâm của đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác.
ĐS: 2,236 (cm)

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho các điểm A(2;3) ; $B(-3;4);C(1;1)$

a) Tính độ dài các cạnh AB, AC, BC *(làm tròn 2 chữ số thập phân)*
b) Tính S_{ABC} *(làm tròn 2 chữ số thập phân)*
c) Tính số đo các góc A, B, C
d) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp của tam giác ABC
e) Tính bán kính đường tròn bàng tiếp góc B
f) Tính khoảng cách giữa hai tâm của đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ABC
g) Xác định tọa độ trực tâm H của tam giác ABC.
h) Xác định tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC
i) Xác định tọa độ tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC
j) Tìm tọa độ điểm D để tứ giác ABCD là hình bình hành
k) Tìm tọa độ của điểm M nằm trên đường trung trực của cạnh BC để diện tích tam giác MBC bằng $5\sqrt{52}$.

Bài 2.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho các điểm A(1;3) ; $B(2\sqrt{3};-5);C(-4;-3\sqrt{3})$

a) Tính độ dài các cạnh AB, AC, BC *(làm tròn 2 chữ số thập phân)*
b) Tính S_{ABC} *(làm tròn 2 chữ số thập phân)*
c) Tính số đo các góc A, B, C
d) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp của tam giác ABC
e) Tính bán kính đường tròn bàng tiếp góc B
f) Tính khoảng cách giữa hai tâm của đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ABC
g) Xác định tọa độ trực tâm H của tam giác ABC.
h) Xác định tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC
i) Xác định tọa độ tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC
j) Chứng tỏ 3 điểm H, O, G thẳng hàng
k) Tính độ dài đường trung tuyến AM
l) Tính độ dài đường phân giác AD
m) Tính diện tích tam giác ADM
n) Tính tỉ số diện tích hình tròn nội tiếp và hình tròn ngoại tiếp ΔABC
o) Tính tỉ số diện tích tam giác ABC với hình tròn ngoại tiếp của tam giác đó.
p) Tính tỉ số diện tích tam giác ABC với hình tròn nội tiếp của tam giác đó.

q) Tính tỉ số diện tích phần giới hạn bởi AD, AM và BC đối với diện tích ΔABC
r) Tính tỉ số diện tích giới hạn bởi đường tròn nội tiếp và các cạnh của tam giác đối với diện tích được giới hạn bởi đường tròn ngoại tiếp và các cạnh của ΔABC
s) Tính tỉ số đường cao AH với đường phân giác AD
t) Tính tỉ số đường phân giác AD với đường trung tuyến AM
u) Tính tỉ số chu vi của tam giác ΔABC đối với đường tròn nội tiếp ΔABC
v) Tính tỉ số chu vi của tam giác ΔABC đối với đường tròn ngoại tiếp ΔABC
w) Tính tỉ số chu vi đường tròn nội tiếp của tam giác ΔABC đối với đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Bài 3.

Cho 3 hàm số $y = \frac{8}{7}x - 2$ (d_1), $y = \frac{3}{8}x - 3$ (d_2), $y = \frac{-18}{29}x + 6$ (d_3). Gọi A là giao điểm của d_1 và d_2, B là giao điểm của d_2 và d_3, C là giao điểm của d_1 và d_3.

a) Tính diện tích tam giác ABC.
b) Tính số đo các góc của tam giác ABC
c) Tính số đo các góc tạo bởi (d_1), (d_2), (d_3) với trục Ox.
d) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp của tam giác ABC
e) Tính bán kính đường tròn bàng tiếp góc B
f) Tính khoảng cách giữa hai tâm của đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ABC
g) Xác định tọa độ trực tâm H của tam giác ABC.
h) Xác định tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC
i) Xác định tọa độ tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC
j) Tìm tọa độ điểm D để tứ giác ABCD là hình bình hành

HIỆU QUẢ CỦA SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

+ Kết quả: Dạy bồi dưỡng giải Toán trên máy tính cầm tay các cấp :

Năm học	Cấp trường	Cấp huyện	Cấp tỉnh	Quốc gia
2010-2011	Đạt 5/8 (3 giải Nhì, 2 giải Ba)	Đạt 3/5 (1 giải Nhất, 2 giải Ba)		
2011-2012	Đạt 29/35 (4 giải Nhất, 7 giải Nhì, 14 giải Ba ,4 giải KK)	Đạt 9/17 (2 giải nhì, 1 giải Ba, 6 giải KK)	Đạt 8/10 (2 giải nhất, 3 giải Nhì, 2 giải Ba, 1 giải KK)	Đạt 1/5 (1 giải KK)
2012-2013	Đạt 12/27 (4 giải Nhất, 1 giải Nhì, 5 giải Ba ,2 giải KK)-Lớp 9	Đạt 11/12 (2 giải Nhất, 4 giải nhì, 5 giải Ba)-Lớp 9	Đạt 8/10 (3 giải Nhì, 2 giải Ba, 3 giải KK)	Đạt 3/5 (2 giải Ba,1 giải KK)
2013-2014		Khối 8: Đạt 11/15 (5 giải Ba, 6 giải KK) Khối 9: Đạt 13/15 (2 giải Nhất, 3 giải Nhì, 3 giải Ba, 5 giải KK)	Đạt 7/10 (2 giải Nhất, 2 giải Nhì, 2 giải Ba, 1 giải KK)	Đạt 3/5 (1 giải Ba, 2 giải KK)
2014-2015		Khối 9: Đạt 10/10 (2 giải Nhất, 5 giải Nhì,	Đạt 10/10 (1 giải Nhất, 3 giải Nhì, 4	**Đạt** 3/5 (1 giải Ba, 2

		3 giải Ba)	giải Ba, 2 KK)	giải KK)
2015-2016		-Lớp 8: Đạt 10/10(5 giải Nhất, 3 giải Nhì, 2 giải Ba) - Lớp 9: Đạt 10/10 (2 giải Nhất, 6 giải Nhì, 2 giải Ba)	- Lớp 9: Đạt 9/10 (2 giải Nhất, 1 giải Nhì, 3 giải Ba, 3 giải KK)	Đạt 5/5 (3 giải Nhất, 2 giải Nhì)
2016-2017		-Lớp 8: Đạt 10/13(2 giải Nhì, 4 giải Ba, 4 giải KK) - Lớp 9: Đạt 11/11 (3 giải Nhất, 6 giải Nhì, 2 giải Ba)	Lớp 9: Đạt 10/10 (1 giải Nhất, 5 giải Nhì, 2 giải Ba, 2 giải KK)	Đạt 3/5 (1 giải Nhì, 1 giải Ba, 1 giải KK)
2017-2018		-Lớp 8: Đạt 12/12(2 giải Nhất, 3 giải Nhì, 5 giải Ba, 2 giải KK) - Lớp 9: Đạt 11/13 (2 giải		

		Nhất, 3 giải Nhì, 5 giải Ba, 1 giải KK)		

+ Kết quả: Dạy bồi dưỡng học sinh giỏi môn Toán các cấp:

Năm học	**Cấp huyện**	**Cấp tỉnh**
2011-2012	- *Lớp 8*: Đạt 6/7 (1 giải Nhất, 4 giải Nhì, 1giải Ba)	*Lớp 9*: Đạt 18/20 (1 giải Nhất, 5 giải Nhì, 6 giải Ba, 6 giải KK).
2012-2013	- *Lớp 9*: Đạt 6/7 (1 Nhất, 2 Nhì, 2 Ba, 1KK) -*Lớp 8:* Đạt 4/7 (2 giải Nhì, 1giải Ba, 1giải KK).	*Lớp 9:* Đạt 11/20 (2 giải Nhì, 4 giải Ba, 5 giải KK).
2013-2014	-*Lớp 8*: Đạt 10/10 (2 giải Nhì, 4 giải Ba, 4 giải KK). - *Lớp 9:* Đạt 6/7 (1 giải Nhất, 1 giải Nhì, 2 giải Ba, 2 giải KK).	Đạt 17/20 (4 giải Nhì, 4 giải Ba, 9 giải KK).
2014-2015	-*Lớp 9:* Đạt 7/10 (2 giải Nhì, 3 giải Ba, 2 giải KK)	Đạt 11/20 (7 giải Ba, 4 giải KK).
2015-2016	-*Lớp 9:*Đạt 6/7 (1 giải Nhất, 2 giải Nhì, 2 giải Ba, 1 giải KK)	-*Lớp 9:*Đạt 9/20 (3 giải Nhì, 4 giải Ba, 2 giải KK)
2016-2017	*Lớp 9:*Đạt 6/7 (2 giải Nhì, 3	-*Lớp 9:*Đạt 11/20 (3 giải Nhì,

	giải Ba, 1 giải KK)	4 giải Ba, 2 giải KK)
2017-2018	*Lớp 9:* Đạt 6/7 (1 giải Nhất, 3 giải Nhì, 1 giải Ba, 1 giải KK)	

+ Kết quả: Dạy bồi dưỡng giải Toán Violympic trên internet các cấp :

Năm học	Cấp huyện	Cấp tỉnh	Quốc gia
2011-2012	2	2	
2012-2013	14	6	Đạt 2/2: 1HCV, 1HCĐ
2013-2014	18	10	Đạt 1/1: 1 HCB
2014-2015	Không tổ chức thi		
2015-2016	31	18	Đạt 5/5: 1 HCV, 2 HCB, 2HCĐ
2016-2017	25	13	Đạt 1/2: 1 KK

+ Có 1 học sinh đậu vào lớp 10 trường chuyên Toán thuộc Đại học Quốc gia TPHCM, đậu thủ khoa trường THPT Mộ Đức số 2 và nhiều em vào trường chuyên Lê Khiết, nhiều em đạt điểm 10 môn Toán trong kỳ thi tuyển sinh vào lớp 10 và lớp chọn của trường THPT số 2 Mộ Đức.

+ Ứng dụng định lí hàm sin trong tam giác được nhà xuất bản Đại học Sư phạm TPHCM xuất bản thành sách vào tháng 12 năm 2015.

KẾT LUẬN

Chủ đề **"Ứng dụng định lí hàm sin để giải tam giác nâng cao"** là một chủ đề rất quan trọng trong bồi dưỡng học sinh giỏi, giải toán trên MTCT. Vì vậy, giáo viên cần phải bồi dưỡng kiến thức Toán đặc biệt là ứng dụng định lí hàm sin để giải tam giác nâng cao và kỹ năng sử dụng MTCT để tính một cách cụ thể và đầy đủ các nội dung bài tập thì HS sẽ có đầy đủ kiến thức và kỹ năng để thi HSG, giải Toán trên MTCT và thi giải toán Violympic trên internet, thi đại học .

Trên đây là nội dung sáng kiến mà bản thân tôi đã tích lũy được trong quá trình giảng dạy. Vì khả năng và thời gian có hạn nên sáng kiến này xin được tạm dừng ở đây.

Rất mong sự góp ý của các đồng chí, đồng nghiệp để sáng kiến này được phát huy tốt hơn nữa.

Đức Nhuận, ngày 2 tháng 3 năm 2018.

XÁC NHẬN CỦA HIỆU TRƯỞNG

Tôi xin cam đoan đây là SK bản thân thực hiện, không sao chép nội dung của người khác, nếu vi phạm tôi xin chịu xử lý theo quy định./.

NGƯỜI VIẾT

Nguyễn Văn Chương

Trần Ngọc Duy

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Một số đề thi giải toán trên máy tính cầm tay các cấp.

2. Đặc san báo Toán học tuổi trẻ số 1 tháng 10 năm 2011.

NHẬN XÉT ĐÁNH GIÁ XẾP LOẠI CỦA HỘI ĐỒNG KH CẤP TRƯỜNG

- Tác dụng của sáng kiến kinh nghiệm:

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

- Tính thực tiễn, sư phạm, khoa học: ………..
- Hiệu quả: ....
- Xếp loại: ....

Đức nhuận, *ngày ... tháng .... năm 2018.*

CT. HĐKH CẤP TRƯỜNG

Nguyễn Văn Chương

NHẬN XÉT ĐÁNH GIÁ XẾP LOẠI CỦA HỘI ĐỒNG ……………………………

- Tác dụng của sáng kiến kinh nghiệm:

....

....

....

....

....

....

…………………………………………………………………………………

....

....

....

....

....

- Tính thực tiễn, sư phạm, khoa học:……………...

- Hiệu quả: ....

- Xếp loại: ....

Mộ Đức*, ngày ... tháng .... năm 2018*

NHẬN XÉT ĐÁNH GIÁ XẾP LOẠI CỦA HỘI ĐỒNG ……………………………

- Tác dụng của sáng kiến kinh nghiệm:

....

....

....

....

....

....

……...

....

....

....

....

....

- Tính thực tiễn, sư phạm, khoa học:…………...

- Hiệu quả: ....

- Xếp loại: ....

…………., ngày ... tháng .... năm 2018

NHẬN XÉT ĐÁNH GIÁ XẾP LOẠI CỦA HỘI ĐỒNG ……………………………

- Tác dụng của sáng kiến kinh nghiệm:

....

....

....

....

....

....

………..

....

....

....

....

....

- Tính thực tiễn, sư phạm, khoa học:…………..

- Hiệu quả: ....

- Xếp loại: ....

…………., ngày ... tháng .... năm 2018

NHẬN XÉT ĐÁNH GIÁ XẾP LOẠI CỦA HỘI ĐỒNG ……………………………

- Tác dụng của sáng kiến kinh nghiệm:

....

....

....

....

....

....

………..

....

....

....

....

....

- Tính thực tiễn, sư phạm, khoa học:…………...

- Hiệu quả: ....

- Xếp loại: ....

…………, *ngày ... tháng .... năm 2018*